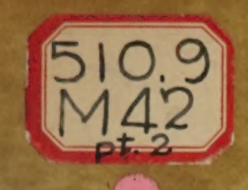


Voss, A

— o —

Die beziehungen der mathematik zur kultur der gegenwart



DIE KULTUR DER GEGENWART

HERAUSGEGEBEN VON PAUL HINNEBERG

DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

UNTER LEITUNG VON F. KLEIN

DES GESAMTWERKES
TEIL III ABTEILUNG I

ZWEITE LIEFERUNG

A. VOSS: DIE BEZIEHUNGEN DER MATHEMATIK ZUR KULTUR DER GEGENWART

H. E. TIMERDING: DIE VERBREITUNG MATHEMATISCHEN WISSENS UND MATHEMATISCHER AUFFASSUNG



1914

BERLIN UND LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

VORBEMERKUNG ZUM BANDE „MATHEMATIK“ DER KULTUR DER GEGENWART.

Daß es seine ganz besonderen Schwierigkeiten hat, im Rahmen der „Kultur der Gegenwart“ die Mathematik in sachgemäßer Weise zur Geltung zu bringen, leuchtet von vornherein ein. Das folgende kurze Inhaltsverzeichnis läßt erkennen, wie wir es unternommen haben, dieser Schwierigkeiten Herr zu werden. A gibt solche Erörterungen über das Wesen und die Bedeutung der mathematischen Wissenschaften, die als solche jedem Gebildeten verständlich sein wollen. Mit den Heften B, C und D bringen wir sodann eine Schilderung des historischen Werdegangs unserer Disziplin. Wir nehmen an, daß diese Form der Darlegung, die mehr die allgemeinen Verknüpfungen als den besonderen Inhalt der aufeinanderfolgenden Entwickelungen hervortreten läßt, zu ihrem Verständnis zwar selbstverständlich einige mathematische Vorkenntnisse voraussetzen muß, aber doch sehr viel zugänglicher ist, als eine systematische Darstellung, die ihre Wirkung erst bei strengem Fachstudium entfalten kann. In E wird sodann der schwierige Versuch gemacht, das Wesen der mathematischen Erkenntnis in einer dem heutigen Standpunkte entsprechenden Form mehr philosophisch darzulegen.

Für die Durchführung des hiermit charakterisierten Planes ist in besonderem Grade — mehr, als bei anderen Bänden der „Kultur der Gegenwart“ — eine gewisse Einheitlichkeit der Darlegungen wünschenswert. Es mußte also nach der Möglichkeit gesucht werden, daß der eine Autor auf dem anderen aufbauen kann. Wir sind der Verlagsbuchhandlung außerordentlich dankbar, daß sie zu diesem Zwecke einer Ausgabe des Bandes in einzelnen Lieferungen zugestimmt hat.

INHALTSANGABE DES BANDES.

Göttingen, im Dezember 1913.

F. KLEIN.

III. Teil. Die mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Kulturgebiete. [19 Bände.]

(* erschienen: I, 1. I, 2. III, 2. IV, 2. IV, 4; † unter der Presse: I, 3. III, 1. III, 3. IV, 1. VII, 1.)

***I. Abt. Die math. Wissenschaften.** (1 Band.) Abteilungsleiter und Bandredakteur: F. Klein. Bearbeitet von P. Stäckel, H. E. Timerding, A. Voß, H. G. Zeuthen. 5 Lieferungen. Lex.-8. *I. Lfg (Zeuthen). [IV u. 95 S.] 1912. Geh. M. 3.— *II. Lfg (Voß und Timerding.) [IV u. 161 S.] 1914. †III. Lfg (Voß) u. d. Pr.

II. Abt. Die Vorgeschichte der modernen Naturwissenschaften u. d. Medizin. (1 Band.) Bandredakteure: J. Ilberg und K. Sudhoff. Bearb. von F. Boll, S. Günther, I. L. Heiberg, M. Hoefler, J. Ilberg, E. Seidel, K. Sudhoff, E. Wiedemann u. a.

III. Abt. Anorgan. Naturwissenschaften. Abteilungsleiter: E. Lecher.

†Band 1. **Physik.** Bandredakteur: E. Warburg. Bearb. von F. Auerbach, F. Braun, E. Dorn, A. Einstein, J. Elster, F. Exner, R. Gans, E. Gehrcke, H. Geitel, E. Gumlich, F. Hasenöhrl, F. Henning, L. Holborn, W. Jäger, W. Kaufmann, E. Lecher, H. A. Lorentz, O. Lummer, St. Meyer, M. Planck, O. Reichenheim, F. Richarz, H. Rubens, E. v. Schweidler, H. Starke, W. Voigt, E. Warburg, E. Wiechert, M. Wien, W. Wien, O. Wiener, P. Zeeman.

*Band 2. **Chemie.** Bandredakteur: E. v. Meyer. **Allgemeine Kristallographie und Mineralogie.** Bandred.: Fr. Rinne. Bearb. von K. Engler, H. Immendorf, †O. Kellner, A. Kossel, M. Le Blanc, R. Luther, E. v. Meyer, W. Nernst, Fr. Rinne, O. Wallach, O. N. Witt, L. Wöhler. Mit Abbildg. [IV u. 663 S.] 1913. ℳ 18.—, ℳ 20.—

†Band 3. **Astronomie.** Bandredakteur: J. Hartmann. Bearbeitet von L. Ambronn, F. Boll, A. v. Flotow, F. K. Ginzel, K. Graff, J. Hartmann, J. v. Hepperger, H. Kobold, E. Pringsheim, F. W. Ristenpart.

Band 4. **Geonomie.** Bandredakteure: † I. B. Messerschmitt und H. Benndorf. Mit einer Einleitung von F. R. Helmert. Bearbeitet von H. Benndorf, † G. H. Darwin, O. Eggert, S. Finsterwalder, E. Kohlschütter, H. Mache, A. Nippoldt.

Band 5. **Geologie (einschließlich Petrographie).** Bandredakteur: A. Rothpletz. Bearbeitet von A. Bergeat, J. Königsberger, A. Rothpletz.

Band 6. **Physiogeographie.** Bandredakteur: E. Brückner. 1. Hälfte: Allgemeine Physiogeographie. Bearbeitet von E. Brückner, S. Finsterwalder, J. von Hann, †O. Krümmel, A. Merz, E. Oberhummer u. a. 2. Hälfte: Spezielle Physiogeographie. Bearbeitet von E. Brückner, W. M. Davis u. a.

IV. Abt. Organische Naturwissenschaften. Abteilungsleiter: R. von Wettstein.

†Band 1. **Allgemeine Biologie.** Bandredakteure: C. Chun und W. L. Johannsen. Bearbeitet von E. Baur, P. Claußen, A. Fischel, E. Godlewski, W. L. Johannsen, E. Laqueur, B. Lidforss, W. Ostwald, O. Porsch, H. Przibram, E. Rádl, W. Roux, W. Schleip, H. Spemann, O. zur Straßen, R. von Wettstein.

*Band 2. **Zellen- und Gewebelehre, Morphologie u. Entwicklungsgeschichte. 1. Botanischer Teil.** Bandred.: † E. Strasburger. Bearb. von W. Benecke und † E. Strasburger. Mit Abb. [VII, 340 S.] 1913. ℳ 10.—, ℳ 12.—. **2. Zoologischer Teil.** Bandred.: O. Hertwig. Bearb. von E. Gaupp, K. Heider, O. Hertwig, R. Hertwig, F. Keibel, H. Poll. Mit Abb. [VIII, 395 S.] 1913. ℳ 16.—, ℳ 18.—

Band 3. **Physiologie u. Ökologie. I. Botan. Teil.** Bandredakteur: G. Haberlandt. Bearbeitet v. E. Baur, Fr. Czapek, H. von Guttenberg. **II. Zoolog. Teil.** Bandredakteur: M. Rubner. Mitarb. noch unbestimmt.

*Band 4. **Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie.** Bandredakteure: R. Hertwig und R. v. Wettstein. Bearbeitet von O. Abel, I. E. V. Boas, A. Brauer, A. Engler, K. Heider, R. Hertwig, W. J. Jongmans, L. Plate, R. v. Wettstein. Mit Abb. [IX, 620 S.] 1914. ℳ 20.—, ℳ 22.—

V. Abt. Anthropologie einschl. naturwissenschaftl. Ethnographie. (1 Bd.) Bandredakteur: G. Schwalbe. Bearb. von E. Fischer, R. F. Graebner, M. Hoernes, Th. Mollison, A. Ploetz, G. Schwalbe.

VI. Abt. Die medizin. Wissenschaften. Abteilungsleiter: Fr. von Müller.

Band 1. **Die Geschichte der modernen Medizin.** Bandredakteur: K. Sudhoff. Bearb. von M. Neuburger, K. Sudhoff u. a. **Die Lehre von den Krankheiten.** Bandredakteur: W. His. Mitarbeiter noch unbestimmt.

Band 2. **Die medizin. Spezialfächer.** Bandredakt.: Fr. v. Müller. Zunächst bearbeitet von K. Bonhoeffer, A. Czerny, R. E. Gaupp, K. v. Hess, W. v. Leube, L. Lichtheim, H. H. Meyer, O. Minkowski, L. A. Neisser, W. Osler.

Band 3. **Beziehungen d. Medizin zum Volkswohl.** Bandredakteur: M. v. Gruber. Mitarb. noch unbestimmt.

VII. Abt. Naturphilosophie u. Psychologie.

†Band 1. **Naturphilosophie.** Bandredakteur: C. Stumpf. Bearbeitet von E. Becher.

Band 2. **Psychologie.** Bandredakteur: C. Stumpf. Bearbeitet von C. L. Morgan und C. Stumpf.

VIII. Abt. Organisation der Forschung u. des Unterrichts. (1 Band.) Bandredakteur: A. Gutzmer.

IV. Teil. Die technischen Kulturgebiete. [15 Bände.]

Abteilungsleiter: W. von Dyck und O. Kammerer. (* erschienen: Band 12; † unter der Presse: Band 2.)

Band 1. **Vorgeschichte der Technik.** Bandredakteur und Bearbeiter: C. Matschoß.

†Band 2. **Gewinnung und Verteilung mechascher Energie.** Bandredakteur: M. Schröter. Bearbeitet von H. Bunte, R. Escher, K. v. Linde, W. Lynen, Fr. Schäfer, R. Schöttler, M. Schröter, A. Schwaiger.

Band 3. **Bergbau.** Bandredakteur: W. Bornhardt. Bearbeitet von H. E. Böker, G. Franke, Fr. Herbst, M. Krahmann, M. Reuß, O. Stegemann.

Band 4. **Hüttenwesen.** Bandredakteur und Mitarbeiter noch unbestimmt.

Band 5. **Landwirtschaft.** In 3 Teilbänden. I. Wirtschaftslehre. Bandredakteur: E. Laur. II. Pflanzenproduktionslehre. Bandredakteur: K. v. Rümker. III. Tierproduktionslehre. Bandredakteur: F. Hoesch. Mitarbeiter noch unbestimmt.

Band 6. **Forstwirtschaft.** Bandredakteure und Bearbeiter: R. Beck und H. Martin.

Band 7. **Mechanische Technologie.** Bandredakteure: E. Pfuhl und A. Wallichs. Bearbeitet von P. v. Denffer, Fr. Hülle, O. Johannsen, E. Pfuhl, M. Rudeloff, A. Wallichs.

Band 8. **Chemische Technologie.** Bandredakteur und Mitarbeiter noch unbestimmt.

Band 9. **Siedelungen.** Bandredakteure: W. Franz und C. Hocheder. Bearbeitet von H. E. von Berlepsch-Valendas, W. Bertsch, K. Diestel, M. Dülfer, Th. Fischer, H. Grässel, C. Hocheder, R. Rehlen, R. Schachner, H. v. Schmidt, R. L. A. Weyrauch u. a.

Band 10 und 11. **Verkehrswesen.** Bandredakteur: O. Kammerer. Mitarbeiter noch unbestimmt.

*Band 12. **Technik des Kriegswesens.** Bandredakteur: M. Schwarte. Bearbeitet von K. Becker, O. v. Eberhard, L. Glatzel, A. Kersting, O. Kretschmer, O. Poppenberg, J. Schroeter, M. Schwarte, W. Schwinning. Mit Abb. [X, 886 S.] 1913. ℳ 24.—, ℳ 26.—

Band 13. **Die technischen Mittel des geistigen Verkehrs.** Bandredakteur: A. Miethe. Bearbeitet von E. Goldberg, A. Miethe u. a.

Band 14. **Entwicklungslinien der Technik im 19. Jahrh. Organisation der Forschung. Unterricht.** Bandred.: W. v. Dyck. Mitarb. noch unbestimmt.

Band 15. **Die Stellung d. Technik zu den anderen Kulturgebieten. I u. II.** Bandredakteur: W. v. Dyck. Bearbeitet von Fr. Gottl. von Ottlilienfeld, H. Herkner, C. Hocheder u. a.

Interims-Titel

DIE KULTUR DER GEGENWART

IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL HINNEBERG



DIE

KULTUR DER GEGENWART

IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE

DRITTER TEIL

MATHEMATIK · NATURWISSENSCHAFTEN MEDIZIN

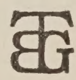
BEARBEITET UNTER LEITUNG VON

F. KLEIN · E. LECHER · R. v. WETTSTEIN
FR. v. MÜLLER

ERSTE ABTEILUNG

DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

UNTER LEITUNG VON F. KLEIN



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN · 1914

DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

UNTER LEITUNG VON F. KLEIN

ZWEITE LIEFERUNG

A. VOSS:
DIE BEZIEHUNGEN DER MATHEMATIK
ZUR KULTUR DER GEGENWART

H. E. TIMERDING:
DIE VERBREITUNG MATHEMATISCHEN WISSENS
UND MATHEMATISCHER AUFFASSUNG



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN · 1914

INHALT DER ZWEITEN LIEFERUNG.



DIE BEZIEHUNGEN DER MATHEMATIK ZUR ALLGEMEINEN KULTUR.

Von

A. Voss.

Unter Kultur verstehen wir die Gesamtheit aller Bestrebungen, durch welche der Mensch sich aus dem nur auf die Befriedigung der nötigsten Bedürfnisse des Lebens gerichteten Zustande zu einer höheren Stufe des Daseins erhebt, in der zugleich mit der Ausbildung aller feineren Äußerungen seines sinnlichen und geistigen Wesens auch die Mittel geschaffen werden, den Forderungen desselben gerecht zu werden. Dieser allgemeine Begriff der Kultur umfaßt nicht nur den jeweiligen Zustand der wissenschaftlichen und technischen Entwicklung, sondern auch das ganze Gebiet der künstlerischen, sozialen, sittlichen und religiösen Formen, in denen das Leben der Menschheit sich ausprägt. Hier, wo es sich darum handelt, die Beziehungen einer Wissenschaft, wie der Mathematik, zu der gegenwärtigen Kultur darzulegen, wird selbstverständlich ganz vorwiegend von der Kultur im ersten Sinne zu handeln sein.

Technische und wissenschaftliche Kultur.

Mit Stolz darf sich unsere Zeit der Pflege und Anerkennung rühmen, welche sie den Wissenschaften, der Technik, der Kunst widmet. In unseren Bibliotheken sammeln wir die Literatur aller Nationen; für die Geschichtsforschung, insbesondere für die Aufhellung nicht nur der glänzenden Epochen des Altertums, sondern auch der dunkelsten Anfänge des menschlichen Daseins, scheint uns kein Opfer zu groß. In unseren Kunstsammlungen häufen wir die kostbarsten Schätze auf und finden es kaum ungerechtfertigt, wenn für Gegenstände von nicht einmal unbestrittener Echtheit große Mittel aufgewandt werden. Täglich steigern sich die Ausgaben, welche für die Vervollständigung unserer zoologischen, botanischen, geophysikalischen und technischen Museen erforderlich scheinen.

Und diese öffentliche und private Pflege der Wissenschaften wird nicht nur durch das Interesse unserer Volksvertretungen unterstützt und gefördert, sondern auch von seiten der großen Zahl der allgemeiner Gebildeten, welche in diesen Gütern nicht nur die Mittel zu einer höheren Ausgestaltung des Lebensgenusses, sondern weit mehr noch die Befriedigung ihres tiefsten Bedürfnisses nach Gewinnung einer Weltanschauung erblicken. Ist auch der einzelne kaum mehr imstande, diesen Fortschritten der Kultur in ihrer gewaltigen Ausdehnung zu folgen, so ist doch für jeden, der unsere Bildungsstätten mit Erfolg durchlaufen hat, die Möglichkeit vorhanden, dieselben in ihren Hauptzügen zu erkennen und in seiner weiteren Lebensführung mit dem beschränkteren Kreise seiner eigenen Aufgaben in wirksame Verbindung zu setzen.

Nur eine Wissenschaft, die Wissenschaft κατ᾽ ἐξοχήν, scheint sich dabei dem allgemeinen Verständnis zu entziehen. Ja man kann geradezu die Frage aufwerfen, ob die Mathematik überhaupt mit den Interessen unserer gegenwärtigen Kulturepoche zusammenhängt. Schon bei oberflächlicher Betrachtung wird man sich kaum der Ansicht verschließen können, daß wenigstens in weit verbreiteten Kreisen, namentlich auch in Deutschland, nur ein geringes Verständnis für die Stellung vorhanden ist, welche sie tatsächlich zu den Grundlagen unserer Kultur einnimmt.

Allgemeine Schätzung der Mathematik.

Zwar fehlt es nicht an äußerer Wertschätzung für die Leistungen der großen Mathematiker. Die staunenswerten Erfolge der Astronomie erregen immer aufs neue die Bewunderung der Menge, wenn es sich um irgendein auffallendes Ereignis, wie eine voraus berechnete totale Sonnenfinsternis oder die zu erwartende Wiederkehr eines Kometen handelt; die Namen eines Newton, Leibniz, Lagrange, Laplace, Gauß, denen wir solche Erfolge verdanken, sind in aller Munde. Wer könnte sich auch dem Eindrucke der Bewunderung entziehen, wenn er die Grabschrift Newtons in der Westminsterabtei sich vergegenwärtigt: „Hic est sepultus Isaacus Neutonius, eques auratus, qui animi vi prope divina planetarum motus, figuras, cometarum semitas, oceanique aestus, sua mathesi facem praeferente, primus demonstravit, radiorum lucis dissimilitudines colorumque inde nascentium proprietates, quas nemo ante vel suspicatus erat, pervestigavit. Sibi gratulantur mortales tale tantumque exstitisse humani generis decus.

Das Andenken an Gauß, den „princeps mathematicorum", wird allgemein verehrt. Zeuge davon ist sein Denkmal in Braunschweig, dessen Aufbau an seine endgültige Lösung der schon von den Alten gestellten Aufgabe der Teilung des Kreises in gleiche Teile, speziell der 17-Teilung, ebenso erinnern soll, wie das noch von Cicero gesehene und in pietätvoller Bewunderung wieder der Vergessenheit entrissene Grabmal des Archimedes, welches dem Beschauer die von diesem gefundenen Beziehungen zwischen den Inhalten von Kegel, Kugel und Zylinder vergegenwärtigte.

Dem ersten systematischen Begründer eines der abstraktesten Gebiete der mathematischen Forschung, einer nicht-euklidischen Geometrie, N. I. Lobatschefskij, hat man fast an den Grenzen der europäischen Zivilisation ein Denkmal errichtet. Der hundertjährige Geburtstag des norwegischen Mathematikers N. H. Abel, dessen Verdienste nur ein hochausgebildeter Verstand würdigen kann, gestaltete sich zu einer großen denkwürdigen Feier in Kristiania, an der die Vertreter aller zivilisierten Nationen teilnahmen. Und in der neuesten Zeit rüstet sich die Schweiz in Verbindung mit einem Stabe von Gelehrten befreundeter Nationen mit der größten Opferwilligkeit, die längst ersehnte, bisher wegen der großen Kosten als unausführbar angesehene Herausgabe der Werke Leonhard Eulers zu verwirklichen.

Aber es ist nicht allein die Bewunderung rein wissenschaftlicher Leistungen, welche das Bewußtsein der Gebildeten durchdringt. Überall treten uns die Beziehungen der Mathematik zum praktischen Leben entgegen. Keine geord-

nete Regierung hat ihren Einfluß je verkennen können. Unter diesem Eindrucke stand auch Napoleon, wenn er den Ausspruch tat: „Die Wohlfahrt der Nationen ist an die Fortschritte der Mathematik gebunden", und dieser damit ihre hohe Stellung an der École Polytechnique bestätigte. Auch Scharnhorst legte hohen Wert auf gründliche Ausbildung in der Mathematik. „Ich betrachte dieselbe als die Grundlage aller feineren Geistesbildung und aller anderen Kenntnisse."

Geringes Verständnis für Mathematik.

Nur wenige haben freilich eine deutlichere Einsicht in das, was die Heroen der Mathematik an Unvergänglichem geleistet haben. Das ist aber wohl eine ganz allgemeine Erscheinung in unserer höheren Kultur, deren Wert nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Menschheit zu erfassen weiß; dies wiederholt sich auch auf anderen Gebieten. Die Bedeutung unserer großen Dichter und Denker wird dem allgemeinen Bewußtsein ja auch nur in derselben unvollkommenen Weise nähergebracht durch solche sichtbaren Zeichen der Verehrung, welche in dem heranwachsenden Geschlecht den Trieb, ihnen nachzueifern, zu erwecken bestimmt sind.

Aber während es allgemein als Zeichen mangelnder Bildung angesehen wird, sich dem Verständnis der Bedeutung eines Kant oder Goethe entziehen zu wollen, hören wir auch ganz andere Stimmen, welche mit der eben geschilderten Verehrung der Mathematik in scharfem Kontrast stehen. Schon oft ist auf die Abneigung hingewiesen, welche das mathematisch formulierte Denken bei der großen Zahl unserer gebildeten Klassen findet. Ein Mann wie W. Wundt, der von den exakten Wissenschaften ausgehend sich zu einer Universalität des Gedankens emporgeschwungen hat, die kaum ihresgleichen zu finden scheint, glaubt sich noch in der Vorrede zur ersten Auflage seines großen Werkes über Logik entschuldigen zu müssen, daß er trotz des schier unüberwindlichen Widerwillens selbst hochgebildeter Männer gegen mathematische Bezeichnungen nicht davon Abstand genommen habe, dieselben in die Darstellung der formalen Logik aufzunehmen. H. Hankel in seiner Rede über die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten (1869) weist darauf hin, wie die ganze Mathematik vielen als eine nichtssagende Trivialität erscheint, die nur durch ihre abstruse Form den Schein von etwas erweckt: „Männer von wissenschaftlicher Bildung rühmen sich, daß sie nie ein Jota von Mathematik verstanden und es dennoch zu etwas gebracht haben."

Mit solchen Argumenten, wie sie die Philosophen W. Hamilton oder A. Schopenhauer gegen die Mathematik ins Feld geführt haben, die noch neuerdings A. Pringsheim scharf und treffend zurückgewiesen hat, brauchen wir uns freilich gegenwärtig nicht mehr zu beschäftigen. Auch die Zeiten sind wohl längst vorbei, wo Johannes Schultze im preußischen Unterrichtsministerium die Ansicht vertreten konnte, „in einer einzigen Zeile des Cornelius Nepos stecke mehr Bildungswert als in der ganzen Mathematik".

Es sind aber nicht allein Gelehrte oder Staatsmänner, die zufolge ihres ganz anderen Zielen zugewandten Bildungsganges sich zu derartigen Aussprüchen bekannt haben, sondern auch von Naturforschern anerkannten

Ranges vernehmen wir gelegentlich solche abfällige Urteile. Gerade in England, wo die Pflege der elementaren Mathematik in weiten Berufsklassen in viel größerem Maße wie z. B. in Deutschland als eine leidenschaftliche Übung des Scharfsinnes betrieben wird, sind auch noch in der neueren Zeit solche Ansichten hervorgetreten. Huxley sagt in einer an der Britisch Association 1868 gehaltenen Rede ,,Mathematics may be compared to a mill of exquisite workmanship, which grinds you stuff of any degree of fineness, but nevertheless what you set out depends on what you put in, and as the grandest mill in the world will not extract wheat-flove from pea's-scods, so pages of formulae will not get a definite result out of loose data'', und an einer andern Stelle ,,Mathematics is that study, which knows nothing of observation, nothing of induction, nothing of experiment, of causation''. Wie unverständig diese Ansichten sind, zeigte J. J. Sylvester in seiner scharfen Entgegnung auf diesen Angriff: ,,No statement could have been more opposite to the undoubted fact of the case, that mathematical analysis is constantly involving the aid of new principles, new ideas, new methods, not capable of beeing defined by any form of words, but springing direct of the inherit powers and activity of human mind and from continually renewed inspection of that inner world of thought, of which the phenomena are as varied and require as close attention to discern as those of the other physical world . . . That it is unceasingly calling forth the faculties of observation and comparison, that one of its principal weapons is induction, that it has frequent recourse to experimental trial and verification and that it affords a boundless scope for the exercise of the highest efforts of imagination and invention.''

Vierzig Jahre sind seitdem verflossen, manches mag sich seitdem durch den Einfluß unserer Schulen und durch die weit allgemeinere Verbreitung der Mathematik geändert haben. Aber trotzdem sind Gleichgültigkeit, Geringschätzung und Verständnislosigkeit des Wesens der Mathematik und seiner Bedeutung im großen und ganzen beinahe dieselben geblieben; ja, sie mögen auch bei jetzigen Vertretern der exakten Wissenschaften hie und da noch bestehen.

Verbreitete Ansichten über die Mathematik.

Welches sind nun die Hauptformen, in denen diese Stimmungen sich ausprägen? Viele stellen sich unter der Mathematik eine Wissenschaft vor, deren Hauptaufgabe numerisches Rechnen ist. Sie denken dabei an die Ermüdung und Langeweile, welche jede längere Rechnung mit sich führt, weil sie stets der Nachprüfung bedarf, und schließlich doch, wie das wiederholte Lesen einer Korrektur, nicht vor zufälligen Fehlern schützt. Der Mathematiker erscheint ihnen als ein Rechenkünstler, der es in einer so einförmigen Arbeit, wie die der Berechnung von Lösungen von Gleichungen, Kettenbrüchen oder Logarithmen zu einer gewissen Virtuosität gebracht hat. Allerdings hat sich ja erst mit der Erfindung der Dezimalbrüche, der Logarithmen, der Tafeln der trigonometrischen Funktionen der Zahlbegriff allmählich geklärt. Insbesondere hat der Begriff der stetig veränderlichen Zahl erst die Ideen vorbereitet, welche der Differential- und Integralrechnung zugrunde liegen. Aber es handelt sich hier doch nur um eine zu überwindende Vor-

Mathematik als Rechen unst.

Bedeutung des Rechnens.

stufe, etwa so wie jeder, der in den Geist einer Sprache eindringen will, sich zuerst mit dem ihr eigentümlichen Alphabet und den einfachsten grammatikalischen Regeln zu beschäftigen haben wird.

Wir bewundern mit Recht so außerordentliche Rechentalente, wie das eines Dahse und anderer, von denen uns die neuere Zeit wieder so merkwürdige Beispiele gegeben hat. Auch lassen sich solche Fähigkeiten sehr wohl mit wahrhaft mathematischen Interessen in Verbindung setzen. Die empirische Tätigkeit des Rechnens kann Wahrheiten induktiv wahrscheinlich machen und der Forschung als aussichtsvolle Probleme aufzeigen. So hat man das bisher unbewiesene Goldbachsche Gesetz, jede gerade Zahl lasse sich mindestens auf eine Art als Summe zweier Primzahlen darstellen, einer empirischen Bestätigung unterzogen, die allerdings für den Beweis noch keine Fingerzeige geliefert hat. Auch hat schon C. G. J. Jacobi sich Dahses bedient, um den von Waring vermuteten Satz, daß jede gerade Zahl durch eine Summe von höchstens 9 Kuben darstellbar sei, als ein Objekt für tiefere Forschung zu bezeichnen, ein Satz, der erst neuerdings durch eine geniale Betrachtung von D. Hilbert in viel allgemeinerer Form der theoretischen Untersuchung zugänglich geworden ist. Gauß waren die ersten Dezimalziffern vieler Logarithmen geläufig, und wir wissen aus seinem Tagebuch, daß er durch ein besonderes Zusammentreffen numerischer Zahlwerte zu einer seiner schönsten Entdeckungen im Gebiet der lemniskatischen Funktionen angeregt wurde. Aber die nur phänomenalen Rechentalente, die sogar mit auffallenden anderen Mängeln verbunden vorkommen, haben an sich nichts mit mathematischen Ideen zu tun, obgleich gerade in der Öffentlichkeit ihre Bedeutung für den Mathematiker betont zu werden pflegt. Der gelegentliche Nutzen eines so gesteigerten Zahlensinnes ist ja nicht zu bestreiten, das wirkliche Interesse daran fällt aber mehr in den Bereich des Psychologen. Er mag darin mehrfache Formen dieses Sinnes zu erkennen glauben, ohne freilich mit den Schlagworten einer optischen, akustischen oder mnemotechnischen Begabung mehr als ein unerledigtes Problem zu bezeichnen, das überall da wiederkehrt, wo wir einer eigentümlich gesteigerten Fähigkeit gegenüberstehen. Beigetragen mag es zu dem Mißverständnis haben, als ob numerisches Rechnen für die Mathematik wesentlich sei, wenn wir hören, daß Ludolf van Ceulen in 20jähriger Arbeit die Zahl π bis auf 20, später sogar auf 35 Stellen berechnete, daß dann diese Bestimmung mit den Mitteln der Analysis auf über 700 Stellen ausgedehnt wurde. Solche Kraftleistungen haben in Wirklichkeit doch kaum ein größeres Interesse, wie die zahlentheoretischen Kuriosa, mit denen die Feuilletons der Zeitungen uns zu unterhalten suchen.

Zudem ist ja allgemein bekannt, daß bloßes Rechnen durch automatisch arbeitende Maschinen ersetzt werden kann; niemandem wird es heutzutage mehr einfallen, deshalb in der Mathematik eine Wissenschaft zu sehen, die auch durch eine Maschine hervorgebracht werden könne.

Weit eher ließe sich sagen, Mathematik sei die Kunst, Rechnungen zu vermeiden oder abzukürzen, sobald — und das ist allerdings von wesent-

licher Bedeutung — mittels des Formalismus der Rechnung ein Problem seinen Ansatz erfahren hat. Das sehen wir schon an den Beispielen der Zinzeszinsrechnung, noch weit mehr an der Entwicklung der analytischen Geometrie, die, zuerst in einen endlosen Rechenprozeß ausartend, seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts durch Einführung der Invarianten- und Gruppentheorie sich ganz auf den Boden einer gedankenvollen Zahlensymbolik gestellt hat. Dahin zielen auch die Methoden, langsam konvergente Reihen, die zur Ermittelung eines numerischen Wertes dienen sollen, durch besser dazu geeignete zu ersetzen. Bei der Anwendung von Leibniz' Reihe für die Zahl π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

müßte man, wie schon Newton tadelte, zur Erzielung einer auch nur mäßigen Genauigkeit sehr viele Glieder berechnen, während J. Machins Formel (1706) π bereits durch Bestimmung von 9 einfachen Gliedern bis auf 8 Dezimalstellen richtig liefert. Auch Gauß konnte sich, wie Sartorius von Waltershausen aus persönlicher Erinnerung mitteilt, rühmen, mit Hilfe seiner Formeln die Berechnung einer Kometenbahn in einer Stunde vollendet zu haben, wozu vor ihm eine höchst mühevolle und zeitraubende Arbeit erforderlich war.

Indem so die Mathematik danach strebt, durch tiefere Gedanken die Verknüpfungen zwischen den Zahlen zu untersuchen, erwächst ihr erst die höhere Aufgabe, allgemeine Gesetze, d. h. Formeln zu gewinnen, welche mit einem Schlage alle, neue Fehlerquellen hervorrufenden, Zwischenrechnungen entbehrlich machen. Und so zeigt auch schon der bloße Einblick in ein mathematisches Werk, daß mit der zunehmenden Vertiefung der Gedanken das äußerliche Element der Rechnung keineswegs in gleichem Maße wächst, vielmehr die Darstellung sich immer mehr von derselben befreit, um nur zur Gewinnung eines einzelnen Resultates zu ihr zurückzukehren. Daher sei noch einmal betont: Ohne Rechnen gibt es keine Mathematik, aber das Rechnen selbst ist nicht Mathematik, sondern findet da seinen gebührenden Platz, wo es wie beim Astronomen und Geodäten, beim Physiker und Statistiker zur Gewinnung letzter mit der Erfahrung zu vergleichender Resultate zur Anwendung kommen muß. Es sei denn, daß man sich die rein mathematische Aufgabe stellt, die zweckmäßigsten Methoden des numerischen Rechnens selbst zu erforschen, eine Aufgabe, der sich denn auch hervorragende Astronomen wie Bessel, Encke und Bruns in einer Weise unterzogen haben, die ein ebenso hohes praktisches wie wissenschaftliches Interesse besitzt.

Mathematik als Sammlung von Aufgaben.

Andere wieder stellen sich die Mathematik als eine Erweiterung, zum Teil auch wohl nutzlose Erschwerung der auf der Schule behandelten Aufgaben vor. Die hergebrachte Form des Unterrichts betont z. B. gern die Ausführung geometrischer Konstruktionen. Gewiß liefern diese für den Schüler eine sehr nützliche Anregung, seine Kombinationsgabe zu entwickeln. Anderseits aber bringt die Fertigkeit, nach bestimmten Mustern Aufgaben zu lösen, die ihnen eigentlich nur künstlich angepaßt sind, leicht die Meinung hervor, daß es sich wirk-

lich um nichts anderes handelt, als diese endlose Möglichkeit, an und für sich gleichgültige, nur für eine abzulegende Prüfung erforderliche Aufgaben zu variieren, als sei die Mathematik noch in der Stagnation früherer Zeiten versunken. So entsteht denn die Meinung, als sei sie dem wirklichen Leben völlig abgewandt und bewege sich nur in einem Kreise eng begrenzter, nicht entwicklungsfähiger Gedanken. Diese geringschätzende Auffassung mag auch zum Teil auf der traditionellen Form des Schulunterrichtes des vorigen Jahrhunderts beruhen. Die Bücher des Euklid bilden in Deutschland zwar nicht, wie in England, das Vorbild, von welchen abzuweichen fast als Verbrechen gilt*). Aber in ihrer logischen Systematik befördern sie doch den Eindruck einer abgeschlossenen Wissenschaft. Es ist indes nicht allein die willkürliche Beschränkung auf die gerade Linie und den Kreis, welche den geometrischen Formenreichtum nicht ahnen läßt, sondern mehr noch die besondere Schwierigkeit, welche den Elementen der Mathematik anhaftet. Der noch von H. Hankel vertretenen Ansicht, daß Euklids Systematik das unübertreffliche Muster einer völlig exakten Behandlung sei, gegenüber hat sich bei der Vertiefung in die Grundlagen längst gezeigt, daß auch in dieser erhebliche Lücken vorhanden sind; gerade diese Grundlagen enthalten Schwierigkeiten, welche den ganzen Scharfsinn eines an abstraktes Denken gewöhnten Gelehrten erfordern. Man braucht sich nur an die Begründung der einfachsten arithmetischen Regeln oder an die so tiefe Lehre von den Proportionen in Verbindung mit den Flächeninhalten zu erinnern, in denen das Talent des Eudoxus oder Euklid zur höchsten Vollendung gelangte. Solche Fragen liegen jenseits des Verständnisses der meisten, vielleicht aller Schüler; sie pflegen umgangen oder durch Berufung auf unmittelbare Evidenz verdeckt zu werden. Dadurch entsteht aber gerade in den fähigeren Köpfen leicht das Vorurteil, als beruhe doch nicht alles Bewiesene auf wirklichen Beweisen, sondern es handle sich eher um eine sophistische Beweiskunst. Der Charakter der Exaktheit der Mathematik, wie ihn das Altertum anstrebte, und der auch das Ideal der neueren Darstellung der Elemente ist, dem sich z. B. mit ausgezeichnetem Erfolge die gegenwärtigen italienischen Lehrbücher nähern, kommt nicht zum Verständnis und kann wohl überhaupt erst auf einer Stufe höherer geistiger Reife begriffen werden. „Dem Knaben", sagt C. G. J. Jacobi, „dem die Welt der geometrischen Formen noch eine gänzlich fremde ist, mit den ersten Elementen zugleich zuzumuten, sich darin in der Weise folgerechten Denkens zu bewegen, scheint keine gute Pädagogik. Ich schreibe diesem Mißverhältnis hauptsächlich zu, daß zwar von den anderen Unterrichtsgegenständen ein Interesse im späteren Leben zurückzubleiben pflegt, von den mathematischen dagegen bei der großen Mehrzahl der Lernenden jede Spur bis auf die Erinnerung schwindet."

Und auf diesen mißverstandenen Eindrücken aus der Jugendzeit beruht es auch, wenn andere in der Erinnerung an die Paradigmen der Arithmetik, die Cardanische Formel, den binomischen Satz oder den Apparat der Trigono-

Mathematik als Formelapparat.

*) Übrigens hat auch in England neuerdings eine Reformbewegung im mathematischen Elementarunterricht begonnen.

metrie sich vorstellen, die Gewinnung solcher Formeln sei der eigentliche Zweck der Mathematik. Allerdings kann diese, wie oben bemerkt, der Formeln nicht entbehren; sie bilden das einzige Mittel, eine lange Gedankenreihe in einer kurzen und völlig adäquaten Darstellung zusammenzufassen. Aber die Gewinnung von Formeln an und für sich ist gar kein Zweck, der das Wesen der mathematischen Gedankenbildung beeinflußt. Wo sie als solcher aufgetreten ist, war es ein Zeichen der Stagnation, in der die Methoden gleichsam automatisch noch fortarbeiteten. Zudem strebt gerade die Wissenschaft selbst danach, den Formelapparat immer mehr zu vereinfachen, das Spezielle durch allgemeine Begriffsbildung zu ersetzen; ihr Ziel ist eine möglichst zentralisierte Darstellung, die unzählige Einzelheiten beiseite lassen darf, weil sie jeder Sachverständige mühelos hinzufügen kann.

Es ließe sich noch eine ganze Reihe anderer Auffassungen namhaft machen, die ausführlicher auf ihre Ursachen zurückzuführen, hier wohl überflüssig erscheint. Für Goethe ist „die Mathematik wie die Dialektik ein Organ des inneren höheren Sinnes; in der Ausübung ist sie eine Kunst wie die Beredsamkeit. Für beide hat nichts Wert als die Form, der Inhalt ist ihnen gleichgültig". Und an einer andern Stelle sagt er: „Was ist an der Mathematik exakt als ihre Exaktheit? Und diese, ist sie nicht eine Folge des inneren Wahrheitsgefühls?" Und in einem Brief an Zelter (28. Febr. 1811): „Übrigens wird mir immer deutlicher, was ich schon lange im stillen weiß, daß diejenige Kultur, welche die Mathematik dem Geiste gibt, äußerst einseitig und beschränkt ist. Ja, Voltaire erkühnt sich irgendwo zu sagen: J'ai toujours remarqué que la géométrie laisse l'esprit, où elle le trouve." Die Geringschätzung, welche Friedrich der Große trotz seines Verkehrs mit d'Alembert, Lagrange, Maupertuis der Mathematik bewies, ist ebenfalls bekannt. Mit Spott äußert er sich gegen Voltaire 1778 über Euler, dessen rein theoretische Berechnung des Effekts der für Sanssouci projektierten Wasserkünste sich allerdings unzureichend, weil den Einfluß der Reibung nicht berücksichtigend, erwiesen hatte, „Vanité des vanités, vanité de la géométrie". Und über den ausgezeichneten Mathematiker J. H. Lambert schreibt er 1764 an d'Alembert: „On m'a presque forcé de prendre la plus maussade créature qui soit dans l'univers pour la mettre dans notre académie. Et quoique je puisse attester qu'il n'a pas le sens commun, on prétend que c'est un des plus grands géomètres de l'Europe." Fast klingt es wie das auch von Sylvester zitierte Wort „Purus mathematicus purus asinus." Und der weltentrückte, in sich versunkene Mathematiker ist ja auch heute noch ein Gegenstand billigen Witzes.

Vielleicht haben wir der Anführung dieser unrichtigen Auffassungen hier einen zu großen Raum verstattet. Aber sie sind so allgemein verbreitet, daß sie, wenn auch aus Höflichkeit oft unterdrückt, doch immer aufs neue die Quelle bilden, aus der Gleichgültigkeit und Geringschätzung fließen.

Esoterischer Charakter der Mathematik.

So ist es in der Tat! Die Mathematik ist allerdings die älteste, aber zugleich die unpopulärste Wissenschaft. Sie ist aber zugleich für die meisten unbequem. Unpopulär ist freilich jede Wissenschaft. Denn während diese

damit beginnt, ein Gebäude von Begriffen, die erst mühsam durch Erfahrung und Abstraktion gewonnen werden können, zu errichten, aus dem die Erkenntnis weiteren Erfahrungsmaterials fließen soll, ist es umgekehrt der Dilettantismus, welcher auf diesen langwierigen Weg verzichten zu können glaubt und sich mit herausgegriffenen Schlagworten begnügt. Nun kann es zwar unter anderen Verhältnissen noch möglich sein, unter Verwendung eines intuitiven und auf richtigen Erfahrungen ruhenden Materials erfolgreich zu wirken, ja wir verdanken geradezu oft die größten Fortschritte solchen unmittelbaren Äußerungen des Geistes, aber in einer Wissenschaft, die einzig und allein in einer abstrakten Sprache redet, ist eine solche Stellungnahme völlig sinnlos. Die Resultate einer historischen Arbeit, die auf mühsamen Quellenstudien beruht, kann man mit dem eigenen Wissen in Verbindung bringen, auch wenn man nie imstande ist, sie selbständig nachzuprüfen; das Ergebnis einer experimentellen Untersuchung wie die Konstatierung eines radioaktiven Elements ist an sich deutlich, obwohl ein einzelner vielleicht nie eine solche Untersuchung wiederholen kann. Aber das Verständnis einer mathematischen Arbeit führt stets eigentümliche Schwierigkeiten mit sich, die vielleicht nur bei außerordentlichen Talenten zurücktreten: Es ist, als ob das Denken sich erst gewöhnen müsse, unentwegt in *einem* Sinne sich zu bewegen, um so dem Gedankengange eines anderen folgen zu können. Schritt vor Schritt muß in nachschaffender Arbeit überwunden werden; erst dann gewinnt man das eigentliche Verständnis für das Resultat und kann es mit dem eigenen Wissen in Beziehung setzen. *Dilettantismus*, auch in höherem Sinne, kann in manchen anderen Wissenschaften sehr anregend wirken, wenn er mit divinatorischer Kraft verbunden auftritt — eines der charakteristischsten Beispiele ist *Goethe* dafür —, *in der Mathematik aber ist er völlig unmöglich.* So ist es nur zu begreiflich, daß große Schichten von Gebildeten wenig Verständnis dafür besitzen, daß Mathematik etwas anderes ist als Rechnen, Lösen von Aufgaben und Formelkram, daß sie vielmehr dem höchsten Triebe des Geistes nach Erkenntnis entspringt, einer sich stets weiter entwickelnden Erkenntnis, die von den einfachsten Tätigkeiten des Zählens und Messens ausgehend nicht allein die Formen dieser Operationen zu allgemeinen Methoden erhebt, sondern sie stets weiter zu bereichern sucht durch Schöpfung neuer Begriffe, die sich ebensosehr die Aufgabe stellt, den Kosmos als ein gesetzmäßig geordnetes Geschehen zu verstehen, als die Gebilde des logischen Verstandes bis in ihre entlegensten Einzelheiten zu prüfen, einer Wissenschaft, die wie ein gewaltiger Arterienstrom unsere ganze Kultur bis in ihre feinsten Kapillaren durchdringt.

Mathematik und Technisch-wissenschaftliche Kultur.

Wir wenden uns nun zunächst zu den *Beziehungen der Mathematik zur technisch-wissenschaftlichen Kultur.* Zweierlei Richtungen werden wir in der letzteren gewahr, die sich gegenseitig befruchten, jedoch in ihrem Wesen prinzipiell voneinander verschieden sind. Die erste beruht auf der *technischen Erfindungsgabe* des Menschen, die Naturkräfte seinen Zwecken dienstbar zu machen.

Technische Erfindungsgabe.

An sich setzt diese Erfindungsgabe keine schulmäßige Wissenschaft voraus. Mit Staunen bewundern wir die gewaltigen Bauwerke untergegangener Völker, die vielleicht länger bestehen werden als unsere stolzesten Brückenkonstruktionen. Und doch sind sie nicht aus einer theoretischen Einsicht in die Verteilung der Kräfte oder einer Festigkeitslehre hervorgegangen. Erfindungen, wie die der Spinn- oder Nähmaschine, der automatischen Konstruktionen, sind nicht aus einer theoretischen Kinematik, sondern aus vielen mühsamen Versuchen oder glücklichen Zufällen entsprungen. Ein armer unwissender Knabe erfindet, wie erzählt wird, das Prinzip der Selbststeuerung an Newcomens Dampfmaschine und gibt damit Veranlassung zu der Ausbildung aller automatischen Vorgänge, die bei Maschinen und bei physikalischen Apparaten verwendet werden. Die beiden wichtigsten Instrumente der Beobachtung, Fernrohr und Mikroskop, haben sich von fast zufälligen Anfängen durch die unermüdliche Arbeit der Mechaniker und Optiker, durch die Methoden der Glasbereitung, zu einer Vollkommenheit erhoben, für die kaum noch eine andere Grenze bleibt als die im Wesen unserer Sinne und der Natur des Lichtes selbst begründete. Die Photographie, die sich nach den tastenden Anfängen Nièpces und Daguerres unabhängig von allem abstrakten Wissen zunächst als Kunst ausbildete, hat gegenwärtig gelernt, durch Heranziehung immer weiterer chemischer und physikalischer Erfahrungen sich zu einem Forschungsmittel auszubilden, das der Astronomie das Vorhandensein bisher nicht beobachteter Himmelskörper zu ermitteln gestattet und für die die Probleme des Fernsehens sowie der Wiedergabe der Gegenstände in ihren natürlichen Farben nahezu erledigt scheinen.

Auch dem wissenschaftlichen Charakter der Chemie treten wir nicht zu nahe, wenn wir an dieser Stelle auf die glückliche Vereinigung von divinatorischer Kombinationsgabe mit zielbewußter Synthese hinweisen, wie sie Kekulé bei seiner Entdeckung des Benzolrings so lebendig beschreibt. In elektrischen Öfen oder der Hitze des Knallgasgebläses erzeugen wir Diamanten, Rubine und Saphire, in kalorischen Maschinen gelingt es uns alle Gase in beliebig großen Mengen flüssig zu machen, mittels der drahtlosen Telegraphie umspannen wir bald die Dimensionen des ganzen Erdballs. Das Telephon dehnt die Wirkung des gesprochenen Wortes auf ungeheure Entfernungen aus, das Grammophon gestattet, dasselbe zu fixieren und die wunderbare Vollkommenheit einzelner Menschenstimmen gleichsam unsterblich zu machen, der Kinematograph führt uns sogar mikroskopische Vorgänge vor Augen und wird so zum wichtigsten Werkzeug der Physiologie und Pathologie, und die Anwendung der Röntgenstrahlen lehrt uns die verborgene Struktur der Körper erkennen.

Es ist wohl überflüssig, diese kurze Skizze, in der nicht einmal die durch Eisenbahnen und Dampfschiffahrt, Telegraphie, Luftschiffe und Maschinen aller Art völlig veränderten wirtschaftlichen Verhältnisse berücksichtigt sind, durch weitere Beispiele zu vermehren. Wer heute eine Ausstellung, wie das Deutsche Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und

der Technik in München, besucht, wird staunen müssen über das, was bisher erreicht wurde, und was noch weiterer Vollendung fähig erscheint.

Aber damit ist das Wesen dieser Kultur in tieferem Sinne nicht erschöpft. Wer ohne ein schon ausgebildetes Wissen eine solche Ausstellung besucht, wird sich mit Beschämung gestehen müssen, daß er wie ein Blinder allen diesen Wundern der Technik gegenübersteht. Die wahre technisch-wissenschaftliche Kultur beginnt erst da, wo der Geist in diesen Dingen nicht mehr bloß merkwürdige Tatsachen, sondern die zielbewußten Mächte erkennt, welche die Fortschritte in die richtige Bahn zu leiten vermochten. Auch ist es völlig unzutreffend, wenn man in den vorigen Beispielen nicht etwas Höheres als die intuitive Kraft der Erfindung sehen wollte: Überall stehen Theorie und Praxis in engster Verbindung, die Konstruktion der Uhren, Fernrohre und Mikroskope, der Kältemaschinen beruht keineswegs nur auf Versuchen, sondern wurde zum Teil erst aus rein theoretischen Erwägungen hergeleitet.

Verbindung von Theorie und Praxis durch die Mathematik.

Eine tiefere Einsicht in alle diese Verhältnisse aber wird erst möglich, wenn die Forschung über die qualitativen Unterschiede hinaus, die ihrem inneren Wesen nach uns völlig unverständlich zu bleiben scheinen, weil unsere unmittelbare Erfahrung keine Verbindung zwischen ihnen herzustellen vermag, vermöge allgemeiner Ideen sich zum Verständnis einer kausalen Gesetzmäßigkeit, zu der quantitativen Vergleichung und Voraussagung erhebt. So beruht denn alles auf jenen primitiven Tätigkeiten, die zugleich den Anfang des mathematischen Denkens bilden, dem Zählen und Messen. Verstehen im exakten, nicht auf unbestimmte Vorstellungen und Analogien gegründeten Sinne, ist eben nichts anderes als berechnen, voraussagen können. Das Sinnlich-wahrnehmbare gibt keine Erkenntnis, diese finden wir einzig und allein in den quantitativen Beziehungen der Elementarbegriffe. Das gilt nicht nur da, wo, wie bei der Erkenntnis technischer, physikalischer und astronomischer Vorgänge die Mathematik sich auf ihrem nächsten Gebiete zu bewegen scheint, sondern in weiterem Sinne auch dort, wo sie mit den Forderungen unseres sozialen und wirtschaftlichen Lebens in Beziehung tritt.

Historische Entwicklung dieses Zusammenhanges.

Indessen werden wir hier davon absehen dürfen, das innere Wesen der Mathematik in seiner abstrakten Form den oben geschilderten unzutreffenden Ansichten gegenüber zu schildern, sondern unsere Aufgabe darin sehen, ihre allgemeine Bedeutung für die technische, wirtschaftliche und soziale Kultur zu schildern. Diese werden wir aber am deutlichsten erkennen, wenn wir den Zusammenhang des mathematischen Wissens mit der Entwicklung der Kultur von ihren Anfängen bis zur Gegenwart, soweit das in einer kurzen Skizze möglich ist, verfolgen.

Babylonier.

Die Anfänge des mathematischen Wissens sind ebenso wie die Entstehung der Sprachen in tiefes Dunkel gehüllt. Bei den Babyloniern treten sie uns bereits auf einer Stufe der Ausbildung entgegen, zu der nur eine lange Zeit der Beobachtung und Erfahrung hinleiten konnte. Nur unter einem reinen Himmel war es möglich, den gesetzmäßigen Wechsel der Tages- und Jahreszeiten in Verbindung mit dem Lauf der Gestirne mittels der Ordnungsprinzipe

des Zählens und Messens zu erfassen. Damit erscheint zugleich die Ziffernrechnung und ein eigentümliches Zahlensystem, in dem eine dezimale und sexagesimale Anordnung sich verbindet, die für die Einrichtung unserer Meßinstrumente maßgebend geblieben ist, die Stürme der französischen Revolution ebenso überdauernd wie alle neueren Versuche, dieselbe durch eine einheitliche Grundlage zu ersetzen. Zugleich besaßen die Babylonier schon ein Maß- und Gewichtssystem, das gleich unserem metrischen alle Maße auf eine Normaleinheit der Länge reduzierte, eine Schöpfung, die nur als Ausfluß weit vorgeschrittener Einsicht begreiflich wird, durch die ein großes Kulturland geordnet werden sollte.

Ägypter. Aus Ägypten stammen, allerdings aus weit späterer Zeit, die ersten handschriftlichen Urkunden mathematischen Inhalts. Der Papyrus Rhind enthält bereits die Grundrechnungsarten unter Benutzung von Zahlzeichen und Operationssymbolen und verwendet sie zur Lösung von dem praktischen Leben entnommenen Aufgaben in ähnlicher Weise wie unsere Elementarbücher; er gibt uns Aufschluß über eine rationelle Feldmeßkunst, die für dieses ackerbautreibende Volk so wichtig war.

So steht die Mathematik zunächst mit den praktischen Bedürfnissen, den religiösen Vorschriften, den Grundlagen einer technisch-wissenschaftlichen Kultur in Verbindung. Aber bei den Griechen scheint sich zuerst die Tendenz ausgebildet zu haben, das mehr zufällig gefundene System empirischer oder intuitiver Regeln auf wenige unzweifelhafte Grundwahrheiten zurückzuführen. Wir müssen davon absehen, diese Entwicklung der Mathematik zur Wissenschaft hier zu schildern, als deren Vollendung die Bücher des Euklid erscheinen, nächst der Bibel wohl das verbreiteste Buch auf der Erde. Und bald darauf erhebt sich Archimedes zu denselben Methoden der Inhaltsberechnung, die fast 2000 Jahre später die Anfänge der Infinitesimalrechnung unter Kepler, Pascal und Fermat einleiten. Von da ab findet ein Nachlassen der produktiven Kraft statt, obwohl fast gleichzeitig unter Apollonius in der Geometrie der Kegelschnitte neue Ideen auftreten, die dem Koordinatenbegriff des Descartes nahe kommen. Und die Bedürfnisse der Astronomie drängen zu weiterer Ausbildung der Trigonometrie, die unter Claudius Ptolemäus ihre für lange Zeit maßgebende Darstellung erreicht.

Griechen.

Wir wissen nicht mit Sicherheit, inwieweit die Mathematik der älteren Inder durch Babylon beeinflußt ist, und in welchem Maße diese selbst später auf die Wissenschaft der Griechen eingewirkt haben. Aber der besonderen Begabung der Inder haben wir tatsächlich das schon bei den Babyloniern im Keime vorhandene Positionssystem der Ziffern zu verdanken, dem selbst ein Archimedes nur nahe gekommen war, sowie die Einführung der trigonometrischen Funktionen, d. h. des Sinus und Kosinus an Stelle der Kreissehnen des Ptolemäus.

Inder.

So entsteht allmählich eine astronomisch-mathematische Kultur, deren Träger in der Zeit des Niederganges der Wissenschaften nun die Araber werden.

Araber.

Harun al Raschid (786—809) läßt Ptolemäus' μεγάλη σύνταξις ins Arabische übertragen, die indischen Sinustafeln werden durch Albategnius (929) eingeführt. Griechische Manuskripte werden erworben, die Bücher des Euklid übersetzt, die indischen Zahlzeichen verbreiten sich als arabische Ziffern, die Algebra wird eine selbständige Wissenschaft. In Spanien entsteht im 12. Jahrhundert durch die Berührung hebräischer, arabischer und romanischer Kultur das Bedürfnis, vermöge der Weltsprache des Lateinischen die Wissenschaft des Altertums allgemein zugänglich zu machen, und so gelangt der Okzident in den Besitz von Übersetzungen der großen Alexandriner und der arabischen Mathematiker.

Renaissance der Mathematik in Italien.

Doch nicht in Spanien, sondern in Italien beginnt im Anfang des 13. Jahrhunderts eine neue Entwicklung der Rechenkunst, gefordert durch die Bedürfnisse des Handels und der fortschreitenden technischen Kultur, für die nun die Lehren der Statik, der Kräfteverteilung wichtig werden. Leonardo Pisano faßt um 1200 in seinem Liber abaci alles zusammen, was sich auf das elementare Rechnen mit Einschluß der Null, der negativen Zahlen, der Brüche, der Kettenregel, der arithmetischen und geometrischen Reihen bezieht.

Und ganz allmählich eröffnet sich damit eine neue Gedankenwelt. Die mathematische Untersuchung erscheint nicht mehr allein als Interesse der rein logischen Spekulation und als Fundament der Astronomie, sondern als die Kraft, welche das Verständnis des Naturgeschehens ermöglicht. Einzelne Persönlichkeiten beginnen sich von dem Zwange zu befreien, mit dem die durch die Kirche gestützte Autorität des Aristoteles die Menschheit gefesselt hatte.

Lionardo da Vinci.

Einen prägnanten Ausdruck findet diese Renaissance in Lionardo da Vinci (1452—1519), der gleich ausgezeichnet als Maler, Architekt, Ingenieur, Philosoph und Mathematiker vielleicht das universellste Genie war, das je gelebt hat. Wie Galilei und Kant*) spricht er seine Überzeugung aus in den denkwürdigen Worten: „Nessuna humana investigazione si può dimandare vera scientia, s'essa non passa per le matematiche dimostrazione" oder „Nessuna certezza delle scientie è dove non si può applicare una delle scientie matematiche e che non sono unite con esse matematiche." Vielleicht sind diese Äußerungen Lionardos und Galileis etwas zu prononciert gefasst. Aber, völlig unabhängig voneinander entstanden, sind sie ein lebhafter Ausdruck für die enthusiastische Gewißheit, mit der diese Männer von der Allgewalt der mathematischen Begriffsbildung erfüllt waren, die in der ganzen Richtung der wissenschaftlichen Forschungen alsbald so charakteristisch hervortreten sollte.

Galileo Galilei.

So beginnt denn nun mit Galilei eine neue Epoche der mathematischen Naturerkenntnis. Nach Aristoteles besteht der Grund für das Fallen der

*) Galileis Ausspruch im Saggiatore lautet: „La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (jo dico l'universo), mai non si puo intendere, se primo non s'impara a intender la lingua à conoscer i caratteri, nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica e i caratteri sono trianguli, cerchi ed altre figure matematiche." — Kant's Worte: „Ich behaupte, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist," sind allgemein bekannt.

Körper in der vagen Idee, daß sie ihren „natürlichen Ort“ suchen. Galilei aber fragt nicht, warum, sondern wie die Körper fallen. Und als Bedingung für die Möglichkeit eines solchen Wissens erkennt er das Prinzip der Trägheit, das ihm — entgegengesetzt der damaligen Ansicht — als eine durch Experimente weder zu bestätigende noch zu widerlegende Wahrheit erscheint: Mobile super planum horizontale projectum mente concipio omni secluso impedimento; jam constat, illius motum aequabilem et perpetuum super ipso plano futurum esse si planum in infinitum extendatur. Und unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der Wirkung einer Kraft von dem augenblicklichen Bewegungszustande, dem Prinzip der Non-hérédité, wie es É. Picard nennt, liefert ihm die Mathematik die Fallgesetze, deren Übereinstimmung mit der Wirklichkeit er ausführlich beweist.

Damit gelangt Galilei zur Analyse der Fragen, die sich auf den Wurf kleiner kugelförmiger Körper beziehen. Aber zur Behandlung der Fälle, wo veränderliche Kräfte wirken, reichten die damaligen Mittel der Mathematik nicht aus.

Descartes.

Hier setzt nun Descartes' große Erfindung der Analytischen Geometrie ein. Zwar sind Koordinaten schon in den ältesten Zeiten in mehrfacher Form in Gebrauch gewesen, von prinzipieller Bedeutung aber blieb immer der Unterschied zwischen dem geometrischen Größenbegriff und der Arithmetik. Erst Descartes löste den Koordinatenbegriff von der Größen- und Dimensionsvorstellung, indem er die Koordinaten als reine Zahlen in bezug auf eine willkürliche Längeneinheit erfaßte. Durch diese Befreiung der Geometrie von der direkten Anschauung wird die Geometrie des Descartes, ein Jahr vor dem Druck von Galileis Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638), zu einem neuen Hilfsmittel der Mathematik.

Und so wird es nun möglich, die im Altertum unerledigten Probleme der Tangentenkonstruktion, der Inhaltsberechnung auf anderen Wegen, als den kunstvollen synthetischen des Archimedes anzugreifen.

Newton.

Andererseits gab Newton in seinen Principia philosophiae naturalis mathematica (1687) den Lehren Galileis durch den Begriff der Masse und ihren Zusammenhang mit der Beschleunigung und der Kraft den Abschluß. Damit waren die Gesetze der Bewegung endgültig festgestellt; sie haben trotz einzelner Schwächen, welche die Axiomata sive leges motus enthalten, durch zwei Jahrhunderte unbestritten als Grundlage der exakten Wissenschaft sich erhalten.

Die naturwissenschaftliche Aufklärung.

Für die Entwickelung des Zeitalters der naturwissenschaftlichen Aufklärung ist Newtons Lehre von der Gravitation von der größten Bedeutung; auf ihr beruht die Mechanik des Himmels. Durch Kopernikus' Buch De revolutionibus orbium coelestium war das geozentrische System des Ptolemäus verdrängt, durch Keplers divinatorische Gedanken waren die Gesetze der Planetenbewegung erkannt und durch Beobachtungen und Rechnungen in langjähriger Arbeit bestätigt. Newton gelingt es auf wenigen Seiten, diese Gesetze als notwendige Folgen allgemeiner Voraussetzungen zu erweisen: so wird die allgemeine Gravitation der Massen zum Prinzip der Erklärung aller kosmischen Erscheinungen. Indes beruht Newtons wahre

Größe nicht auf dieser allgemeinen, auch schon vor ihm von anderen ausgesprochenen Idee, sondern auf der genialen Weise, mit der er dieselbe im einzelnen mathematisch zu verfolgen wußte. Es ist das Problem der drei Körper, das er mit solchem Erfolge für Erde, Mond und Sonne erforscht, daß er am Schluß seines Werkes sagen kann: motus omnes lunares, omnesque motuum inaequalitates ex allatis principiis consequi; sunt etiam alia quaedam nondum observatae inaequalitates, quibus motus lunae adeo per turbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint.

Aber nicht allein der Beobachtung stellten sich neue Aufgaben, sondern auch der Mathematik selbst. Wenn wirklich die Gravitation alle kosmischen Phänomene beherrschte, mußten auch Mittel gefunden werden, die Anziehung von Körpern beliebiger Gestalt und Massenverteilung zu bestimmen, während man damals nur die konzentrisch geschichteter Kugeln nach Newtons prop. VII im Buch III der Principia auf die Attraktion punktueller Massen zurückzuführen wußte.

Die Infinitesimalrechnung.

Durch Newtons und Leibniz' Erfindung der Infinitesimalrechnung wurden die nötigen Mittel dazu geschaffen. Damit beginnt nun eine der merkwürdigsten Epochen in der Geschichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnis. Probleme, die bisher völlig unlösbar waren, erscheinen jetzt in einem ganz neuen Lichte, und unter den vereinten Bemühungen der großen Paladine der Infinitesimalrechnung, der Bernoullis, Euler, Lagrange, d'Alembert, Laplace, vollendet sich die Durcharbeitung des Gravitationsgedankens. Jede scheinbare Ausnahme von seiner universellen Gültigkeit wird zu einem neuen Triumph für denselben —, wenn wir auch nicht verschweigen dürfen, daß auch noch gegenwärtig in der Bewegung des Mondes und noch mehr in der des Merkur nicht völlig durch diese Theorie erklärte Abweichungen auftreten. Aus ihm folgte die Abplattung der Erde an den Polen im Widerspruch mit den Gradmessungen des jüngeren Cassini. Die Entscheidung hierüber erregte das Interesse der damaligen Welt in einem Grade, wie es gegenwärtig in demselben Maße kaum bei der Nachricht von so außerordentlichen und lang ersehnten Erfolgen, wie der Erreichung des Nord- und Südpols der Erde durch Peary und Amundsen der Fall ist. Aber erneute Messungen bestätigten in den beiden großen Expeditionen unter Maupertuis in Lappland*) und Bouguer in der Nähe des Äquators Newtons Voraussagung. D'Alembert begründete dann theoretisch die Präzession der Tag- und Nachtgleichen aus der Abplattung der Erde, und in Verbindung damit ergab sich auch die zweite der Erdachse eigentümliche Bewegung, die Nutation. Die Attraktion beliebiger Massen wird durch Lagranges Potentialfunktion auf ihren einfachsten Ausdruck zurückgeführt, in dem Laplace und Poisson das bestimmende Element für alle Bewegungsvorgänge erkennen.

*) Die Genauigkeit der Beobachtungen von Maupertuis wurde allerdings bald bestritten. Erst weitere Messungen in den nördlichen Breiten haben zu völlig unzweifelhaften Resultaten geführt.

Astronomisch-mathematische Weltanschauung.

So bildet sich die mathematisch-astronomische Weltanschauung, die unerschütterliche Überzeugung von der absoluten Gesetzmäßigkeit des Naturgeschehens, für das man die Grundlage in Newtons Fernwirkung gefunden zu haben glaubte. Ihren Höhepunkt erreicht sie wohl bei Laplace, dem der ganze Lauf der Welt als ein großes System von Differentialgleichungen erscheinen mochte, dessen Lösung die fernste Vergangenheit und Zukunft gleichmäßig in sich begreifen müßte. In der großartigsten Weise werden von ihm alle Mittel der Analyse zur Mécanique céleste (1799—1825) verwandt, deren Ziel der Nachweis der bis auf ferne Zeiten verbürgten Stabilität unseres Sonnensystems bildet.

Die neuen Anforderungen, welche die Bahnbestimmung der kleinen Planeten machte, veranlaßten die Theoria motus (1809) von Gauß. Es war ein weiterer Triumph für Newtons Gesetz, als 1835 die Wiederkehr des Halleyschen Kometen im Einklang mit seiner berechneten Bahn wirklich eintraf, ein noch größerer die auf der Theorie allein beruhende Auffindung des Planeten Neptun. Der 1781 von J. Herschel entdeckte Uranus zeigte Abweichungen von der theoretisch bestimmten Bewegung, die zur Annahme bisher unbekannter Störungen zwangen. So entstand die Überzeugung, der Bessel 1845 in einem Briefe an A. v. Humboldt Ausdruck gab, daß ein früher nicht beobachteter Planet die Ursache der Uranusstörungen sei. Fast zu gleicher Zeit stellten sich J. Adams und L. Le Verrier die kühne Aufgabe, die Elemente eines diesen Störungen entsprechenden Himmelskörpers zu bestimmen. Sie fanden unabhängig von einander, allerdings auf Grund ähnlicher Voraussetzungen, nahezu dieselben Werte, Adams sogar noch etwas früher als Le Verrier; aber an den Namen des letzteren knüpft sich der Ruhm der Auffindung des Neptun, die noch an demselben Tage durch Encke's Assistenten Galle erfolgte (18. September 1846), als Le Verrier jenen zur Beobachtung einer bestimmten Himmelsregion aufgefordert hatte. Wer wird nicht dabei der Worte Schillers gedenken:

> „Mit dem Genius steht die Natur in ewigem Bunde,
> Was der eine verspricht, leistet die andre gewiß,"

zumal, wenn wir bedenken, daß die berechnete Position des Neptun eigentlich nur gerade zu jener Epoche mit seiner wirklichen in naher Übereinstimmung sich befand, denn seine hypothetisch bestimmten Elemente weichen doch erheblich von den später festgestellten ab.

Geographie.

Hier wäre endlich auch noch der Fortschritte der Kartographie zu gedenken, welche seit Hipparchs stereographischer Projektion der Kugel, durch Lagranges konforme Abbildung aller Rotationsflächen (1779), wie durch Gauß' Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827) zu den wichtigsten Sätzen der Geometrie Veranlassung gab, bis in die neueste Zeit ein unerschöpfliches Gebiet geometrischer und geographischer Forschungen.

Mathematik und Physik.

Aber Aufgaben ganz anderer Art entstanden, als man von den kosmischen Forschungen sich den physikalischen Erscheinungen zuwandte. Schon Laplace mußte in seiner Theorie der Kapillarität (1806) neue, erst innerhalb

eines gewissen Wirkungskreises zwischen den Massen auftretende Kräfte annehmen. Und das Coulombsche Gesetz (1785) der statischen Elektrizität und des Magnetismus zeigte die Möglichkeit einer mathematischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, für welche wieder das Potential Lagranges in Verbindung mit Laplaces und Poissons Sätzen das bahnbrechende Hilfsmittel wurde. Auch die Elastizitätstheorie wird nun auf solche Molekularkräfte gegründet, erfordert aber bald weitere Hypothesen, die trotzdem mit den Erscheinungen selbst sich nicht in Einklang bringen lassen. Damit tritt ein neuer Gedanke in den Vordergrund, der der Feldwirkung, welche, von allen solchen Hypothesen absehend, die allgemeinen Zug- und Druckverhältnisse eines elastischen Mediums nach den Gesetzen der Mechanik der Continua behandelt, und so die bereits von Galilei begonnene mathematisch-physikalische Anschauung ins theoretische Gebiet aufs erfolgreichste hinüberleitet. Auf dieser Erkenntnis beruht eines der wesentlichsten Verdienste des grossen Mathematikers A. L. Cauchy. Seine Arbeiten in den Exercices d' Analyse et de Physique mathématique (seit 1822) über die Mechanik deformierbarer kontinuierlicher Systeme haben über die gleichzeitigen molekulartheoretischen Ansätze L. Naviers und S. D. Poissons den Sieg davongetragen. Erst die durch G. Greens Arbeiten (1842) vorbereitete Einführung des thermodynamischen Potentials in die Elastizitätslehre durch W. Thomson (1857) geht über Cauchys Konzeptionen hinaus.

Elastizitätstheorie.

Die Elastizitätstheorie steht mit der Lehre vom Licht in engster Beziehung. Newtons Emissionstheorie war während des 18. Jahrhunderts trotz der sich immer häufenden theoretischen und experimentellen Widersprüche fast durchgängig maßgebend geblieben. Nach der Undulationstheorie von Huygens (1691) beruht das Licht, dem Schall analog, auf der Fortpflanzung von Schwingungen eines imponderabelen elastischen Mediums, des Äthers. Huygens gelingt es so, die Reflexions- und Brechungsgesetze abzuleiten; L. Foucaults berühmte Versuche (1855—1862) entscheiden endgültig gegen die Emissions- und für die Undulationstheorie. In seiner mathematischen Beschreibung der Doppelbrechung in Kristallen erscheint Huygens als ein divinatorisches Genie. Seine Konstruktion der Wellenfläche wird durch Wollaston und Malus (1803 und 1810) experimentell bestätigt; noch weit merkwürdiger ist die von W. R. Hamilton 1833 aus der Gestalt dieser Fläche unter einer ganz besonderen Versuchsanordnung bei zweiachsigen Kristallen vorausgesagte äußere konische Brechung, die von H. Lloyd sofort am Arragonit unzweifelhaft nachgewiesen wurde.*) Aber die verschiedenen Farben, in die das Licht sich bei der Brechung spaltet, vermochte Huygens nicht zu erklären. Den ersten Schritt dazu tat Euler um die Mitte des 18. Jahrhunderts, indem er die Schwingungszahl der Ätherteilchen in Beziehung zur Farbe brachte, wie man das bei der Fortpflanzung verschiedener Töne längst gewohnt war. Und Th. Young gelang es zu An-

Die Lehre vom Licht.

*) Ob Lloyds Versuchsanordnung auch die innere konische Brechung zur Erscheinung bringt, ist neuerdings von W. Voigt in Zweifel gezogen.

fang des 19. Jahrhunderts, auch die Interferenzerscheinungen, allerdings mehr qualitativ als quantitativ, zu erklären. Neue Schwierigkeiten bereitete freilich die durch Malus entdeckte Polarisation des Lichtes: sie wurden von Fresnel (1817) durch die Annahme beseitigt, die nun maßgebend wird, daß die Vibrationen des Äthers nicht in der Richtung des Lichtstrahls, sondern senkrecht dazu erfolgen. Damit war dem Äther allerdings die Eigenschaft einer elastischen Flüssigkeit abgesprochen, denn in dieser können sich solche Schwingungen nicht fortpflanzen, wenn man an den Gesetzen der Hydrodynamik festhält. Man mußte also zunächst den Äther als ,,festes" elastisches Medium ansehen. Hier griff nun Cauchys Elastizitätslehre ein, nach der drei Wellen von der Art, wie man sie zur Erklärung zunächst braucht, sogenannte ebene Wellen, bestehen können, von denen die eine, longitudinale, keine Lichtempfindung einleitet, während die beiden anderen transversalen die Doppelbrechung hervorrufen. Aber auch trotz Cauchys Ableitung der Dispersion (1836) aus seiner allgemeinen Theorie blieben weitere Fragen. Wir erinnern nur an die Streitfrage, ob die Schwingung im polarisierten Lichte in der Polarisationsebene oder senkrecht dazu erfolge, die sich weder durch mathematische, noch durch experimentelle Untersuchung entscheiden ließ, — anderer Erscheinungen, wie z. B. der Absorption und Fluoreszenz gar nicht zu erwähnen.

Optische Instrumente.

Hier ist auch an die große Förderung zu erinnern, welche die Kultur durch die Verfeinerung der optischen Instrumente mit Hilfe der Mathematik erfuhr. Von den zwei erheblichen Mängeln derselben, der sphärischen und chromatischen Abweichung, konnte zwar der erstere sowohl empirisch als auch durch Berechnung genügend reduziert werden, desto mehr aber schien der letztere wesentlich mit der Brechung des inhomogenen Lichtes verbunden. Aber Euler zeigte, ausgehend von der damals als vollkommen angesehenen Achromasie des Auges, wie man durch Anwendung von Gläsern verschiedenen Brechungsvermögens auch die farbigen Ränder des Bildes hinreichend beseitigen könne: so führte die Theorie den Optiker J. Dollond alsbald (1757) zur Herstellung achromatischer Objektive. Ist nun auch letztere vorzugsweise eine Kunst geblieben, so haben andererseits die mathematischen Untersuchungen E. Abbe's (1873, 1879) sowohl die Grenzen ihrer durch die Natur des Lichtes selbst bedingten Leistungsfähigkeit, als auch die Möglichkeit gezeigt, durch besondere Hilfsmittel dieselbe noch weiter zu steigern.

Elektrizität und Magnetismus.

Hatte sich so die Elastizitätstheorie immer weiter von der astronomischen Mechanik entfernt, so begegnen wir nun demselben Prozeß auf dem großen Forschungsgebiet des 19. Jahrhunderts, dem der Elektrizität und des Magnetismus. Zunächst versprach das Coulombsche Gesetz unter den Händen von Laplace, Poisson und G. Green im Bereich der statischen Elektrizität die schönsten Erfolge. Aber Gauß zeigte in den ,,Allgemeinen Lehrsätzen in Beziehung auf die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte" (1839), daß die Wirkung von im Innern einer geschlossenen Fläche verteilten Magneten durch eine ideale Anordnung magnetischer Massen auf der Oberfläche derselben so ersetzt werden

kann, daß für alle äußeren Punkte die Kraftwirkung dieselbe bleibt: damit wird die mechanistische Konstruktion des Innern gleichgültig, es entsteht die Theorie des Erdmagnetismus. Ampère gelingt es, die inzwischen entdeckte Elektrodynamik durch sein Gesetz für die Wechselwirkung von Stromelementen zu begründen, während F. Neumann, im Anschluß an M. Faradays Induktionserscheinungen, auf die Gewinnung differentieller Gesetze verzichtend, sich zu den Integralgesetzen (1845) erhebt. Diese zum Teil noch astronomisch denkende Physik erreicht ihren Höhepunkt unter W. Weber (1846), der in einem allgemeinen dem Gravitationsgesetze vergleichbaren Elementargesetze die Grundlage aller dieser komplizierten Vorgänge zu umfassen sucht, dessen mathematische Form von C. Neumann 1868 auf die Annahme einer zeitlichen Fortpflanzung der elektrischen Kraft begründet wird.

An das Göttinger Dioskurenpaar knüpft sich die erste praktische Ausführung der elektrischen Telegraphie (1833), aber erst W. Thomsons mathematische Untersuchungen der Induktionserscheinungen in einem submarinen Kabel (1857) ermöglichen es 1866, deutlich erkennbare Zeichen von Europa nach Amerika zu senden.

Maxwells Theorie.

Doch die Fernwirkungstheorien, in denen man vor 60 Jahren die höchste Stufe der Naturerkenntnis sah, konnten gegen die Beobachtungen Faradays über den Einfluß des Zwischenmediums sich nicht behaupten. Hier setzte nun Maxwells großes mathematisches Genie ein. Die Elektrodynamik der Gegenwart — wir folgen hier W. Voigt — umfaßt in den Maxwellschen Gleichungen alle Äußerungen der ruhenden und bewegten Elektrizität, von dem einfachen Influenzproblem und den Gesetzen konstanter Ströme mit ihren magnetischen Wirkungen bis zu den Schwingungserscheinungen, mit solcher Genauigkeit, daß sie den Effekt jedes Experimentes zahlenmäßig voraussagen kann. Und zugleich spricht sie die Gesetze aller optischen Erscheinungen so umfassend aus, daß die bloße Betrachtung ihrer Formeln wiederholt zur erfüllten Voraussage noch nicht gesehener Erscheinungen geführt hat.

Das Webersche Gesetz ergab das merkwürdige Resultat, daß zwei elektrische Teilchen bei einer gewissen Relativgeschwindigkeit keine Wirkung aufeinander ausüben; W. Weber und R. Kohlrausch zeigen 1856, daß diese Geschwindigkeit der des Lichtes nahezu gleich sei. Es ist das Verdienst von J. C. Maxwell, diese scheinbar zufällige Übereinstimmung durch seine elektromagnetische Lichttheorie verstehen gelehrt zu haben. Dabei tritt ein merkwürdiger Umstand ein, der sich auch auf anderen Gebieten der mathematischen Physik wiederholt. So verschieden auch der Treatise of electricity and magnetism (1873) von der älteren Auffassung mit ihren Leitern und ungeschlossenen Strömen ist, die mathematischen Hilfsmittel brauchten nur unwesentlich verändert zu werden. An die Stelle der Integrale Ampères und Webers tritt allerdings ein System von Differentialgleichungen, welches ebensosehr die geometrischen Verhältnisse als die grundlegenden Daten der Beobachtung und die vermöge der Vektoranalysis zu fordernde innere Symmetrie der Formeln divinatorisch zum Ausdruck bringt.

Ihre Entwicklung durch Hertz.

Und nun gelingt es 1888 H. Hertz, zur Bestätigung dieser Theorie das Vorhandensein einer solchen der Fortpflanzung des Lichtes analogen Ausbreitung der elektrischen Wellen, die Bedingungen ihres Entstehens, ihre Wellenlänge experimentell aufzuzeigen. Welche Kulturfortschritte sich hieran geknüpft haben, ist jedem bekannt. Denn wir leben ja mitten in der Zeit, wo durch das mit Branlys Kohärer geschärfte elektrische Auge von Hertz und durch Marconis eminentes Talent die drahtlose Telegraphie entstand, wo wir die elektrischen Wellen, die sich wegen ihrer größeren Länge nach ganz anderen Gesetzen über die Erde verbreiten, wie die geradlinigen Lichtstrahlen, an jeder Stelle, in der Luft oder auf dem Meere, zu erkennen vermögen*). Und die neuen Erfahrungen beim Durchgange der Elektrizität durch stark evakuierte Röhren führen zu einer Umwälzung der bisherigen Ansichten über die Grundlagen der Chemie und Physik, welche die mathematische Begründung der materiellen Erscheinungen mittels der elektromagnetischen Vorstellungen in nahe Aussicht zu stellen scheint.

Die Wärmelehre, Wärmeleitung.

Noch auf einem dritten Gebiete, der Wärmelehre, hat die Mathematik des 19. Jahrhunderts entscheidend eingegriffen. J. B. Fourier erkannte 1822, daß die Probleme der Wärmeleitung durch die Annahme, der „Wärmefluß" sei der Temperaturdifferenz der benachbarten Teilchen proportional, mathematisch behandelt werden können. Seine Analyse stellte aber der Mathematik selbst ganz neue Aufgaben, die der Darstellung willkürlicher Funktionen durch besonders einfache Arten derselben, wie z. B. die trigonometrischen oder Verallgemeinerungen derselben; sie haben zu einer großen Zahl von Arbeiten geführt, die mit den höchsten Fortschritten der Analyse bis in die neueste Zeit verknüpft geblieben sind.

Mathematik und technische Wissenschaften.

Bisher ist vorwiegend die Entwickelung der exakten Naturwissenschaften besprochen, in der die Kraft der Mathematik sich am reinsten offenbart, und bei denen zugleich die gewonnenen Resultate einer genaueren experimentellen Bestätigung zugänglich sind. Die physikalische Forschung richtet sich auf Erkenntnis der Gesetze, sie sucht zunächst immer die Naturerscheinungen zu isolieren, in ihre Elementarvorgänge aufzulösen und alle störenden Nebenumstände zu eliminieren. Aber die technischen Wissenschaften können dabei nicht stehen bleiben. Bei ihnen handelt es sich meist um Beziehungen, die, aus dem Zusammenwirken zahlreicher physikalischer Kräfte entspringend, nur durch Mittelwerte von Beobachtungsreihen bekannt sind und daher — selbst wenn eine allgemeine rein mathematische Behandlung durchführbar wäre — doch ihrem Wesen nach nur in geeigneten Annäherungsmethoden an die Wirklichkeit ihren Ausdruck finden können. Eben durch die Notwendigkeit, den Bedürfnissen des wirklichen Lebens zu genügen, wird das eigentümliche Verhältnis bestimmt, in dem die technischen Wissenschaften zur abstrakten Mathematik stehen.

---

*) Die weit empfindlicheren Resonatoren, an deren Vervollkommnung die Gegenwart unausgesetzt arbeitet, können wir hier nicht erwähnen.

Die Beziehungen zwischen den technischen Wissenschaften und der Mathematik zu verstehen, ist aber auch für jeden erforderlich, der im Dienste der Entwickelung der ersteren zu wirken berufen ist. Nicht jeder kann zugleich auch Forscher auf dem abstrakten Gebiete sein. J. M. Rankine bemerkt in der Vorrede zu seiner angewandten Mechanik: „The question for the engineer is — what am I to do? And he must decide immediately. For the mathematician the question is — what am I to think? And he can take an unlimited time."

Aber eine bloß handwerksmäßige Benutzung des in Formeln und Tabellen niedergelegten Apparates ist unmöglich, wenn man nicht zugleich Einsicht in den Zusammenhang desselben besitzt. Dies ist auch das leitende Prinzip des Studiums der exakten Wissenschaften an unseren technischen Hochschulen, mag es auch im einzelnen hinsichtlich seiner Ausdehnung gewissen Schwankungen unterworfen sein.

Es sind die graphischen und numerischen Methoden, welche in der Technik immer mehr in den Vordergrund getreten sind. Die analytische Geometrie setzt uns zwar in den Stand, die Durchschnitte beliebiger Flächen, z. B. bei der gegenseitigen Durchdringung der Körper, den Schattenkonstruktionen, dem exakten Entwurf räumlicher Darstellungen überhaupt, zu untersuchen. Doch wie viel anschaulicher und für derartige Zwecke brauchbarer erscheinen die Methoden der von G. Monge (1795) systematisch begründeten Darstellenden Geometrie, welche, alsbald in den Unterricht an der École polytechnique zu Paris aufgenommen, seitdem an den technischen Lehranstalten zu einer der wichtigsten Grundlagen für die mathematische Behandlung geworden sind. Hier liefert die zeichnende Konstruktion, wenn sie mit ausreichender Genauigkeit ausgeführt wird, eine unmittelbar auf die praktische Ausführung im großen übertragbare Anweisung.

Darstellende Geometrie.

Aber die Methoden Monges werden wiederum vertieft durch die allmähliche Ausbildung der projektiven Geometrie. Die Geometrie der Lage, die, schon von den Alten in Angriff genommen, sich durch Desargues (1639) in Verbindung mit den Lehren der Perspektive zu wahrhaft großen Fortschritten erhoben hatte, tritt mit dem traité des propriétés projectives des figures, dessen Grundzüge J. V. Poncelet in der Einsamkeit seiner Gefangenschaft in Saratow entwirft (1812) und der systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von J. Steiner (1832) als ein selbständiger Forschungszweig auf, dessen Bedeutung weit über die für die darstellende Geometrie grundlegenden Begriffe der Affinität und Collineation hinausgreift. Dies zeigt sich namentlich in den Untersuchungen K. von Staudts (1847) und den fundamentalen Gesichtspunkten der projektiven Metrik F. Kleins (1872), welche die projektive Geometrie unabhängig von der Geometrie des Euklides aufbauen und in die wichtigsten geometrischen Forschungen der neueren Zeit so neugestaltend eingegriffen haben.

Projektive Geometrie.

Auch die Untersuchungen der Statik, rein analytisch verfolgt, werden weitläufig, wenn man sie auch nur auf die einfachen Verhältnisse der Fach-

Graphostatik.

werkskonstruktionen anwenden will. Demgegenüber erweist sich die graphische Konstruktion, wie sie bereits bei Varignon (1725) den an das Seilpolygon anschließenden Untersuchungen zugrunde liegt, weit übersichtlicher. Unter Poncelet werden sie bereits vielfach verwandt, aber erst G. Culmann (1864) entwickelt mit Hilfe der projektiven Auffassung die graphische Statik zu einem vollständigen System, das in dem Kräfteplan des Ingenieurs seinen Ausdruck findet. Mit ihm verbindet sich bald darauf durch J. C. Maxwell (1864) und L. Cremona (1872) die schöne Theorie der Reziprozität in der graphischen Statik, und zugleich eröffnet sich auch die Aussicht, die graphischen Methoden bei dynamischen Verhältnissen zur Anwendung zu bringen.

Maschinen-konstruktionen.

Die Festigkeitsberechnung der Maschinenkonstruktionen gründet sich zwar gleichfalls auf die mathematische Elastizitätslehre und die physikalische Festigkeitslehre. Aber die in der Praxis erforderlichen Konstruktionen sind meist zu kompliziert, als daß sich eine strenge Lösung der mathematischen Probleme unmittelbar erwarten ließe. Auch hier werden einer beständigen Prüfung und Erfahrung, insbesondere in bezug auf den Einfluß der Wärme, des Winddruckes, der Bruch- und Druckfestigkeit, zu unterziehende spezifische Näherungsmethoden geschaffen, welche, geleitet durch die sicheren Fundamente der Theorie, so verwickelte Verhältnisse zu beurteilen gestatten, wie sie z. B. bei einer Brückenkonstruktion stattfinden.

Hydrodynamik.

Ein ganz besonderes Interesse haben in neuerer Zeit die hydrodynamischen Untersuchungen gewonnen, veranlaßt durch die großen Probleme der Bewegung der Schiffe, der Ballistik, der Aerodynamik. Hier muß der Ingenieur mit dem scharfen Blick ausgerüstet sein, der ihn befähigt, bei der Behandlung der allgemeinen Differentialgleichungen einer nicht mehr reibungslosen Flüssigkeit diejenigen Elemente auszusondern, welche von wesentlichem Einflusse sind, wenn es sich z. B. darum handelt, einen genaueren Einblick in die Verhältnisse der Wirbelbewegung zu gewinnen, für die Helmholtz bahnbrechende mathematische Theorie die Grundlagen geschaffen hat (1858). Nun zeigen die Beobachtungen, daß bei der Bewegung im Wasser und in der Luft mit genügender Annäherung von der Reibung abgesehen werden kann, außer in der unmittelbaren Umgebung der von der Flüssigkeit durchströmten Körper. Daraus ergibt sich der besondere Charakter der technischen Probleme, welche sich die Gegenwart stellt! Auf diesem sich gegenseitig befruchtenden Zusammenwirken der Mathematik mit den Forderungen der Technik beruht die Kraft, mit der unsere Zeit das Naturgeschehen ihren Zwecken unterwirft.

Thermodynamik.

Aber weit mehr noch wird unsere Naturerkenntnis durch das Energieprinzip und die Thermodynamik beeinflußt. Und während die Theorie der Wärmeleitung zunächst Einfluß auf die Fortbildung des Funktionsbegriffes gewann, wird umgekehrt in der Thermodynamik die rein mathematische Behandlung von der größten Bedeutung für die allgemeine physikalische Erkenntnis.

Versuchen wir, diesem Ideengange etwas näher zu folgen. Bekanntlich ist zur Überwindung der konstanten Schwerkraft, zum Heben eines Gewichtes aus einem tieferen Niveau in ein höheres, bei gleicher Anfangs- und Endgeschwindigkeit desselben eine Arbeit, „Kraft mal Weg" erforderlich. Aber die allgemeine Definition der mechanischen Arbeit beruht auf dem Integralbegriff; unter G. Coriolis (1829) und J. V. Poncelet (1826) wird sie zur Grundlage der theoretischen Maschinenlehre, der Lehre, Arbeit durch bestimmte Vorrichtungen in nutzbarer Form zu gewinnen. Arbeit aus Nichts zu gewinnen, war das Bestreben derer, die ein Perpetuum mobile herstellen wollten. Ist aber dies unmöglich, dann müssen die Kräfte der Natur — wenigstens wenn sie nur von den Angriffspunkten abhängen — konservativ sein, d. h. sie müssen ein eindeutiges Potential $-U$ besitzen, und der Satz D. Bernoullis $T + U = \text{const} + A$ (A die Arbeit anderweitiger äußerer Kräfte) regelt die Beziehung zwischen den potentiellen und kinetischen Bestandteilen U und T der Energie E.

Die beiden Hauptsätze der Thermodynamik.

Aber dieser Satz der reinen Mechanik trifft in der Wirklichkeit nicht zu. Überall, wo es sich um Einflüsse der Reibung, der Zähigkeit, des Stoßes handelt, geht scheinbar ein Teil der Energie verloren; an seine Stelle tritt unter bestimmten Voraussetzungen eine gewisse Wärmemenge, die also einer Energie entsprechen muß. Und der genialen Rechnung R. Mayers (1842), den Versuchen J. P. Joules (1843), gelingt es, das mechanische Arbeitsäquivalent der Wärme zu ermitteln. Der Satz von Bernoulli erhält jetzt eine viel allgemeinere Form: $E - E_0 = A + Q$, wo E die totale, auch die Wärmebewegung einschließende Energie, Q die zugeführte Wärme bedeutet. In dieser Gestalt ordnet sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik wieder der rationellen Mechanik ein.

Dieser jedoch reicht nicht aus, um die thermischen Zustände der Arbeitsmaschinen zu begründen. Die Ansicht, die Wärme sei ein unzerstörbares Fluidum, ist freilich damit gefallen, aber es bedurfte erst S. Carnots Untersuchung des Kreisprozesses einer idealen Wärmemaschine (1824), um endlich R. Clausius (seit 1850) auf das zweite Axiom der Thermodynamik zu führen: „Wärme geht niemals ohne Arbeitsaufwand von einem kälteren zu einem wärmeren Körper über."*) Diese Sätze bilden für den Konstrukteur die Grundlage, um die verwickelten Vorgänge in unseren Wärmemaschinen zu verfolgen und so die Vorschriften für den Bau derselben zu gewinnen. Und die abstrakte Theorie, welche den Begriff eines vollkommen umkehrbaren Prozesses bildet, liefert den fundamentalen Satz: Unter allen Wärme-

*) Nach M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik (1909), muß man als eigentliche Quelle des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik das Prinzip von der Unmöglichkeit eines „Perpetuum mobile zweiter Art" ansehen. Während das „Prinzip des Perpetuum mobile erster Art" die Aussage enthält, daß auf keine Weise Arbeit aus Nichts geschaffen werden kann, besagt jenes zweite Prinzip, daß es unmöglich ist, eine periodische Bewegung hervorzubringen, bei der einzig und allein eine positive Arbeit geleistet und zugleich Abkühlung eines Wärmereservoirs stattfindet.

maschinen, die zwischen gegebenen Temperaturen arbeiten, hat die vollkommen umkehrbare den größten Wirkungsgrad. Dabei wird nun ein rein mathematischer Begriff, der des Integralwertes eines exakten Differentials (der schon oben bei der Erwähnung der Kräftefunktion oder des Potentials hervortrat) wichtig, dessen charakteristische Eigenschaft darin besteht, nur von den Anfangs- und Endwerten der in das Differential eingehenden Variabelen abhängig zu sein. So gelangt man zur Definition der Entropie, d. h. des Integrals aus den einem Systeme zugeführten Wärmemengenelementen dividiert durch die bei der Aufnahme derselben stattfindende absolute Temperatur, und zu der Folgerung, daß die Entropieänderung bei einem umkehrbaren Prozesse nur von dem Anfangs- und Endzustand abhängt, also beim umkehrbaren Kreisprozeß gleich Null ist.

Nun sind freilich die Naturprozesse in Wirklichkeit irreversibel. Denkt man sich aber zwei verschiedene Zustände eines thermischen Systems durch einen eingeschalteten umkehrbaren Prozeß zu einem Kreisprozesse ergänzt, so hat die Entropie jenes Prozesses, die man jetzt als ,,Entropie des Systems" beim Übergang von dem ersten in den zweiten Zustand bezeichnet, immer einen positiven Wert. So führt die mathematische Analyse zur Erkenntnis der großen Wahrheit, die man auch als den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet, daß bei allen Vorgängen im Innern eines begrenzten, keinen äußeren Wirkungen unterliegenden Systems die Veränderungen nur im Sinne beständig wachsender Entropie erfolgen; ein Satz, den manche geneigt sind, auch noch für die Gesamtheit alles Geschehens im Weltall in Anspruch zu nehmen.

Unter der Energie eines materiellen Systems in einem durch seine Lage und Geschwindigkeit, seine Temperatur wie seine magnetischen, elektrischen und chemischen Eigenschaften quantitativ bestimmten Zustande versteht man die Arbeit, welche dasselbe nach außen zu leisten vermag, wenn es von diesem in einen gewissen Normalzustand übergeht. Das Vorhandensein eines solchen von der Art und Weise des Überganges völlig unabhängigen Energiewertes kann man entweder als eine durch zahllose Prüfungen bestätigte Tatsache ansehen oder als einen Satz, der auf der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile beruht. Dies große Prinzip, das von R. Mayer 1842 in mehr intuitiver Form, von H. Helmholtz unabhängig von diesem 1847 — allerdings unter Berufung auf engere Begriffe der Mechanik — in quantitativer Weise ausgesprochen wurde, wird nun zum Leitfaden für die Beurteilung aller Naturerscheinungen.

Chemie und Mathematik.

Damit eröffnet sich auch die Möglichkeit einer mathematischen Chemie. Ein erster Schritt dazu war es, als Lavoisier 1789 und Proust erkannten, daß bei allen Veränderungen der Stoffe das ,,Gewicht" derselben unverändert bleibt, daß chemische Verbindungen nach ganz bestimmten Gewichtsverhältnissen ihrer Bestandteile erfolgen. So entsteht Daltons Gesetz der multiplen Proportionen (1803) und die quantitative Bestimmung der Zusammensetzung der Stoffe durch die Mischungsregel, deren Anfänge

bereits in Richters Dissertation De usu matheseos in chymia 1789 auftreten. Eine geometrische Gesetzmäßigkeit ergibt sich aus dem Gay-Lussacschen Gesetze (1802) von den einfachen Volumverhältnissen, nach denen die Elemente im gasförmigen Zustande zusammentreten. Daran schließt sich wieder die Thermodynamik der Gase im Zusammenhang mit der kinetischen Gastheorie, die Zustandsgleichung von van der Waals. Und endlich erinnern wir an die Reaktionsgeschwindigkeiten, an die allgemeinen Formeln von W. Gibbs, welche sich auf das Gleichgewicht und die Dynamik der Phasen eines Systems beziehen, d. h. der verschiedenen Aggregatzustände und Verbindungen, in denen die Elemente nebeneinander auftreten können. Aus allen diesen, doch fast ausschließlich auf rein mathematischem Boden entstandenen Theorien erwächst die tiefere, physikalisch-chemische Erkenntnis, deren sich die Gegenwart rühmen darf. Die große Bedeutung der Untersuchungen von Gibbs mag man namentlich an der von ihm gefundenen Phasenregel erkennen, nach der n ,,von einander unabhängige" chemische Bestandteile, deren Massen beliebig gegeben sind, höchstens $n+2$ coexistierende Phasen bilden können, ein Satz, der, aus rein theoretischen Betrachtungen entspringend, übrigens durch Bakhuis-Roozeboom eine weitgehende experimentelle Bestätigung erfahren hat.

Stereochemie.

Der verfeinerten Beobachtung genügen nun auch nicht mehr die primitiven Strukturformeln in der Ebene. Le Bel, dann Van 't Hoff in seiner Chimie dans l'espace (1875) und andere werden die Schöpfer einer Stereochemie, in der durch die erst im Raum möglichen symmetrischen und asymmetrischen Bindungskräfte der Atome die besonderen Eigenschaften sonst völlig gleicher organischer Verbindungen ihre Erklärung finden. Welche Umwälzung damit verbunden ist, zeigt die großartige Ausbildung der Zucker- und Farbenindustrie, sowie die neueren Arbeiten, welche durch zielbewußte Synthese die organischen Verbindungen aufzubauen streben, mit deren Gewinnung die Lebensbedingungen der Menschheit verknüpft sind.

Mathematik und Sozialwissenschaften.

Damit aber betreten wir den Zusammenhang der Mathematik mit unserem wirtschaftlichen und sozialen Leben. Da gedenken wir vor allem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es war vielleicht zuerst nur ein Spiel der Gedanken, als Galilei mit einem Freunde oder Pascal mit dem Chevalier de Meré sich über die Chancen des Würfelns unterhielten und nun die vage Idee des ,,Wahrscheinlichen" mathematisch definiert wurde.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Aber von dem Begriff der apriorischen Wahrscheinlichkeit, Anzahl der günstigen Fälle eines Ereignisses dividiert durch die aller gleichmöglichen, erhebt sich Bernoullis Gesetz der großen Zahlen (1713) zu einer ganz neuen Auffassung, die aus dem Ergebnis häufig wiederholter Versuche auf die Wahrscheinlichkeit ihrer ,,Ursachen" Schlüsse ziehen läßt. Zwei Hauptfragen treten hier hervor: Welches ist die Erwartung in bezug auf künftig auszuführende Versuche, und welches sind die Schlüsse, die man aus vorliegenden Versuchsreihen auf die zugrunde liegenden Ursachen derselben ziehen kann?

Gesetz der großen Zahlen.

Schließen sich zwei Ereignisse A und B, deren apriorische Wahrscheinlichkeiten p und q sind, gegenseitig aus, so wird bei einer Anzahl von s Wieder-

holungsfällen des Ergebnisses A oder B, bei denen etwa A m-mal, B n-mal auftritt, diejenige Kombination die größte Wahrscheinlichkeit besitzen, bei der das Verhältnis der Zahlen $m : n$, wobei $m + n = s$ ist, dem von $p : q$ am nächsten kommt. Die Wahrscheinlichkeit dieser ausgezeichneten Kombination wird zwar mit wachsendem s kleiner als jede noch so kleine Zahl. Aber lang fortgesetzte mathematische Betrachtungen, namentlich von Stirling, de Moivre und Laplace, haben gezeigt, daß mit einer ganz bestimmten Wahrscheinlichkeit W zu erwarten ist, daß $\frac{m}{s}$ und $\frac{n}{s}$ d. h. die relativen Häufigkeiten von m und n, innerhalb der Grenzen $\frac{1}{s}(p \mp z)$ und $\frac{1}{s}(q \pm z)$ liegen, wo z sehr nahe dem Werte $t = \sqrt{\frac{2pq}{s}}$ ist, und daß nun zugleich $W = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{-t^2} dt$ ist. Man kann also bei gegebenem nicht zu großem z durch Wahl eines großen s es erreichen, daß t groß wird, daß also, da für $t = \infty$, W den Wert Eins hat, mit einer an die Gewißheit herankommenden Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, daß die relativen Häufigkeiten von m und n im Verhältnisse der nun als Unbekannte zu betrachtenden Wahrscheinlichkeiten p und q stehen.

Nun besteht allerdings zwischen der Gewißheit $W = 1$, d. h. der absoluten Notwendigkeit und einer Wahrscheinlichkeit, die der Eins beliebig nahe liegt, ein wesentlicher Unterschied. Denn die erste entspricht dem wirklichen Geschehen, die zweite der logisch-mathematischen Berechtigung, dieses Geschehen zu erwarten. Wir haben uns hier nicht mit den Betrachtungen zu beschäftigen, durch die man versuchte, den metaphysischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Gesichtspunkten entweder zu begründen oder als problematisch zu verwerfen. Eine Tatsache aber ist es, daß, wie vielfach seit Buffon bis in die neueste Zeit fortgesetzte Versuche gezeigt haben, das wirkliche Geschehen sich im Einklang mit dem Gesetze der großen Zahlen befindet.

Statistik und Nationalökonomie.

Und hieraus ergeben sich für die Beurteilung der Gesetzmäßigkeit einer großen Anzahl sich wiederholender, als gleichartig angesehener Fälle diejenigen mathematischen Urteile, welche der Statistik, der Nationalökonomie, der Lebensversicherung zugrunde liegen, bei denen man Prinzipien fordern muß, die nicht auf den wechselnden Motiven einer unbestimmten Erwartung, sondern auf mathematischer Erfassung der erfahrungsmäßigen Grundlagen (Bevölkerungs- und Sterblichkeitszahlen) beruhen. Ihrer unparteiischen Entscheidung verdanken wir das Vertrauen, mit dem wir bei ihrer beständigen Benutzung für die Beurteilung der Ereignisse des sozialen Lebens erfüllt sind.

Methode der kleinsten Quadrate.

Fast ebenso groß ist aber die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Beurteilung wiederholter Messungen physikalischer Größen. Denn auf diesem engeren Gebiete sind die Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung weit sicherer erfüllbar. Bei wiederholter Messung der Winkel eines Dreiecks wird man ihre Summe im allgemeinen nicht gleich zwei Rechten finden. Es handelt sich also darum, an den Beobachtungsresultaten Korrektionen anzubringen, derart, daß der zu befürchtende Fehler für jeden einzelnen

Winkel „möglichst klein" wird. So entsteht die Lehre von den Beobachtungsfehlern, d. h. von der Wahrscheinlichkeit, daß ein gewisser Fehler zwischen bestimmten Grenzen enthalten sei. Zugleich ergibt sich aber die Möglichkeit einer Kritik an den Beobachtungen selbst, deren Ergebnisse vermöge jener Fehlertheorie — falls sie zutrifft — Beziehungen zeigen müssen und daher als unbrauchbar zu verwerfen sind, wenn die letzteren nicht erfüllt sind. Und endlich handelt es sich um die Ermittelung der wahrscheinlichsten Werte der Korrektionen selbst. Wir müssen, um den Rahmen dieser Darstellung nicht zu überschreiten, davon absehen, die großartige Theorie von Gauß (1821) zu schildern, die mit einem Minimum hypothetischer Voraussetzungen die Ausgleichungsrechnung begründet. Diese aber muß bei jedem System von Beobachtungen zur Anwendung kommen, mag es sich nun um die wissenschaftlichen Ziele der Astronomie und Physik, oder die praktischen Zwecke der Geodäsie, z. B. die Führung eines Tunnels durch ganze Gebirge hindurch, handeln.

Bernoullis logarithmische Formel.

Verständlicher mögen andere der Wahrscheinlichkeitsrechnung nahestehende Gedanken erscheinen. Nach D. Bernoullis Annahme (1730) ist der „moralische Wert des Gewinnes", welcher aus einem beliebig kleinen Zuwachse eines bereits vorhandenen Besitzes, eines „Gutes", entsteht, diesem Zuwachs direkt, der Größe des Gutes umgekehrt proportional. Daraus ergibt sich für den moralischen Wert y des Umstandes, daß das Gut von dem Anfangswerte a in den Endwert x übergegangen ist, d. h. als Bewertung des Gewinnes $x - a$ die Formel $y = k \log\left(\frac{x}{a}\right)$.

Diese Erwägungen haben zu einer rationellen Güterlehre geführt, die dem Gut nicht nur einen objektiven, sondern auch einen subjektiven Wert beilegt. Der Tauschverkehr erscheint hier nicht mehr als Äußerung eines den Menschen innewohnenden „Tauschtriebes", der nur eine andere Verteilung der Güter bewirkt, wie Adam Smith glaubte, sondern erhält seine wahre Bedeutung ebensosehr durch das Hinzutreten dieser psychologischen Momente. Allerdings haben die Versuche, die erwähnten mathematischen Begriffe unmittelbar auf wirtschaftliche Gesichtspunkte zu übertragen, auch manchen Widerspruch erfahren.

In eine merkwürdige Parallele dazu tritt die von G. Th. Fechner begründete Psychophysik.

Psychophysik.

Der von Fechner (1860) im Anschluß an E. H. Webers Untersuchungen gezogene Schluß, daß der Zuwachs der Empfindung nicht dem Unterschied der sie hervorrufenden Reize, sondern deren Verhältnis proportional, daß also auch hier Bernoullis Formel maßgebend ist, in der nun a den Schwellenwert des Reizes, y die Intensität der dem Reize x entsprechenden Empfindung ist, mag vielleicht — auch wenn man dieselbe mit Helmholtz abändert — nur für den Gesichts-, Tast- und Gehörsinn mit genügender Annäherung zutreffen. Man wird wohl G. E. Müller beistimmen müssen, daß E. H. Webers Gesetz eigentlich nur aussagt, daß der Unterschied der Empfindungen eine zunächst ganz unbekannte Funktion des Reizverhältnisses ist. Aber die von Fechner einge-

leitete Bewegung ist doch von großer Wichtigkeit geworden; an sie knüpfen sich die Untersuchungen der experimentellen Psychologie, deren Ausbau für die exakte Deutung psychischer Vorgänge in den letzten Dezennien so lebhafte Förderung erfahren hat.

Mathematik und beschreibende Naturwissenschaften.

Indessen scheint es doch auch Gebiete unserer naturwissenschaftlichen Kultur zu geben, in die das Element der Mathematik nicht eindringt. Bisher traf das zu für alle Teile derselben, die z. B. der Systematik, der morphologischen Beschreibung, der Biologie angehören, obwohl man auch hier an die Beziehungen der Phyllotaxis zu den Kettenbrüchen, an die statistisch mathematischen Untersuchungen Nägelis über die Bastardierung der Hieraciumformen, an das Mendelsche Gesetz der Vererbung usw. erinnern könnte.

Aber schon die physique sociale L. Quetelets (1846, 1869), dann die Kollektivmaßlehre von Fechner, überhaupt die Lehre von den Massenerscheinungen eröffnen eine viel weiter gehende Anwendung der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Neuerdings ist in England durch K. Pearson (seit 1895) und F. Galton (an die sich eine sehr ausgedehnte Literatur insbesondere auch in Zeitschriften angeschlossen hat) damit begonnen, die biologischen Fragen, welche seit Darwins Untersuchungen über die Variabilität und den Charakter der Arten, für die Vererbung bestimmter Eigenschaften im Zusammenhang mit der Rassenhygiene so wichtig geworden sind, mathematisch exakter Auffassung zugänglich zu machen. Grundlegend ist dabei der Begriff der Korrelation, d. h. der funktionalen Abhängigkeit von Erscheinungen. Sind z. B. A und B zwei Organe derselben oder auch voneinander verschiedenen Individuen, bei denen eine numerisch ausdrückbare Eigenschaft um bestimmte Mittelwerte schwankt, so ermittelt man die Größe y der mittleren Abweichung vom „Mittelwert des Organs B", welche zu einer gegebenen Größe x der Abweichung von dem Mittelwert des Organs A gehört. Die Zuordnung von y zu x liefert dann eine empirische Kurve, welche wie umfassende Beobachtungen zeigen — in vielen Fällen einer Geraden sehr nahe kommt. Da die beiden Zahlen x und y an sich nicht in reziproker Beziehung stehen, so ergibt sich als Ausdruck für die funktionale Abhängigkeit von A und B ein System von zwei, im allgemeinen verschiedenen Geraden, deren Neigung gegen die Achse des Koordinatensystems das Maß der Korrelation oder Regression bezeichnet. Hieraus lassen sich Schlüsse ziehen, welche ein Licht auf die oben bezeichneten, bisher noch so dunklen Verhältnisse zu werfen versprechen. Doch müssen wir uns damit begnügen, diese Untersuchungen erwähnt zu haben, die mit so wichtigen Fragen des organischen Lebens in Verbindung stehen.

Der Mikroskopiker bedarf genauer Kenntnis der Leistungsfähigkeit seines Instruments. Für ihn reicht die bloße Anschauung räumlicher Verhältnisse, die jeder zu besitzen glaubt, nicht aus, um aus dem mikroskopischen Bilde das Verhalten des Objekts zu erkennen. Denn jenes Bild zeigt zunächst nur ein System paralleler Querschnitte. Und da lehrt gerade die darstellende Geometrie aus solchen Querschnitten oder Projektionen die adäquate Vor-

stellung des Gegenstandes selbst zu gewinnen. So befähigt sie nicht allein den zeichnenden Künstler — oder sollte es wenigstens tun — seine Komposition den räumlichen Verhältnissen entsprechend zu gestalten, sie ist auch für den Botaniker und Zoologen ein wichtiges Mittel, das ihn vor fehlerhaften Deutungen schützt; auf die verwickelteren Phänomene, welche Brechung und Beugung des Lichts im mikroskopischen Bilde hervorrufen, kann hier nur hingedeutet werden. Sollen wir noch darauf hinweisen, daß unsere heutige auf der Kristallphysik beruhende Mineralogie schon ausgedehnte Kenntnisse in der mathematischen Optik und Elastizitätstheorie verlangt, und daß dem Geologen durch die Methoden der Photogrammetrie sich täglich ein wichtigeres Hilfsmittel erschließt?

Mathematik und Medizin.

Am meisten scheint noch die Wissenschaft der Medizin des mathematischen Elements zu entbehren. Und doch finden sich hier ebenfalls die vielseitigsten Berührungspunkte. Schon seit langer Zeit geben die Physiologen ihrer Überzeugung Ausdruck, daß ein dem jetzigen Standpunkt angemessenes Verständnis ihrer Wissenschaft nur auf gründlichen mathematischen Kenntnissen beruhen könne. Der optische Apparat des Auges, der akustische des Ohrs, dessen Darlegung Helmholtz in seiner physiologischen Optik (1856) und der Lehre von den Tonempfindungen (1862) einen großen Teil seiner Lebensarbeit gewidmet hat, verlangt nicht nur elementare Kenntnisse, sondern vor allem ein richtiges Verständnis der Wellenbewegung, für das die Wasserwellen ein zwar sehr beliebtes, aber ebenso leicht mißzuverstehendes Bild liefern. Auch die Bewegung des Blutes in den Gefäßen ist ein Problem der Fortpflanzung von Wellen in einem System elastischer Röhren. Und selbst wenn man hier, wie in der Hydrodynamik bis vor den letzten Jahren mehr auf die experimentelle Kenntnis allgemeiner Regeln angewiesen ist, so ist es doch erforderlich, die Begriffe des Elastizitätsmoduls, des Druckes, der Geschwindigkeit, des stationären Zustandes zu kennen, die in ihnen auftreten.

Für jeden, der, wie z. B. auch der Arzt, allgemeine Beziehungen in ein geometrisches Schema einzuordnen hat, sind Kenntnisse in der analytischen Geometrie und Analysis unerläßlich. Daß das Gefälle der Kurve oder ihr Differentialquotient die Intensität ihres Wachstums mißt und für ein Extremum in Null übergeht, daß auf ein Maximum ein Minimum folgt, wenn nicht ein singuläres Verhalten der Kurve vorliegt, der Begriff der asymptotischen Näherung, die einfachsten Regeln der Interpolation und die Umstände, unter denen sie anwendbar sind, das alles sind Dinge, die ohne scharfe mathematische Begriffe sich nicht über eine vage Anschauung erheben.

Mathematik und Philosophie

Wir haben bisher die Mathematik nur in ihren Beziehungen zur wissenschaftlichen und praktischen Naturerkenntnis behandelt. Aber von jeher hat die Menschheit danach gerungen, alles, was überhaupt in den Bereich ihres Geistes fällt, durch den Prozeß des begrifflichen Denkens zu durchdringen. Damit wenden wir uns der Betrachtung der großen Aufgabe zu, welche die Philosophie sich gestellt hat.

Mag man nun in den Versuchen dieselbe zu lösen, das höchste Ziel und die vollkommenste Entwicklungsstufe der menschlichen Geistestätigkeit erblicken, oder mag man die Geschichte der Philosophie nur als eine Kette von hoffnungslosen Abwegen unserer Vernunft ansehen, eine Erkenntnis zu erlangen, die überhaupt jenseits alles allgemeingültigen Wissens liegt und nur als Form poetischer Intuition Bedeutung beanspruchen kann, niemand wird bestreiten wollen, daß in den, einem unauslöschlichen Triebe unseres Geistes entspringenden, philosophischen Bestrebungen von jeher sich der Zustand der geistigen Entwicklung am lebhaftesten ausprägte, und daß auch heute noch unsere intellektuelle Kultur in hohem Maße von den philosophischen Gedanken der Alten und von der Geistesarbeit der großen Denker der neueren Zeit abhängt.

Allerdings liegen die philosophischen Betrachtungen der Gegenwart vielfach nach einer andern Richtung als in der des mathematischen Denkens, und bei der ungeheuren Ausdehnung, welche die von einem ihr eigentümlichen Geiste ausgehende mathematische Anschauungsweise sich im 19. Jahrhundert geschaffen hat, wird auf beiden Seiten in einer ganz verschiedenen Sprache geredet, welche nicht selten zu gegenseitigen Mißverständnissen führt. „Die philosophischen Ergebnisse", sagt Kant 1764, „sind wie die Meteore, deren Glanz nichts für ihre Dauer verspricht; sie verschwinden, aber die Mathematik bleibt." Aber das ist die große und vielleicht immer noch nicht in ihrem ganzen Umfange gewürdigte Bedeutung, welche die Mathematik in den reinen Geisteswissenschaften einnimmt, daß sie in so inniger Berührung mit dem steht, was durch Jahrhunderte hindurch das Denken der größten Geister erfüllt hat.

Historische Darstellung der Beziehungen zwischen Mathematik und Philosophie.

Hier wollen wir nun in großen Zügen rein historisch, ohne auf irgendeine Kritik einzugehen, darlegen, wie bei all diesen Bestrebungen die eigentümliche Forschungsweise der Mathematik und ihre beständig doch vor allem Zweifel gesicherten Sätze es waren, in der die Philosophie immer aufs neue den Ausgangspunkt erblickte, um selbst sichere Erkenntnis zu gewinnen.

Im hellenischen Geiste, so scheint es, ist zuerst die Ahnung entstanden, daß eine über die empirischen Tatsachen hinausgehende Erkenntnis möglich sei. Und soweit diese lehrbar ist, sind ihre Gegenstände die μαθήματα, also vorzugsweise die Objekte des mathematischen, speziell geometrischen Denkens; erst unter den Peripatetikern löst sich der Begriff der Mathematik von den übrigen Inhalten des Wissens ab und erhält damit die besondere Stellung, die ihm seitdem geblieben ist.

Die Pythagoreer.

Am deutlichsten tritt das wohl bei der pythagoreischen Schule hervor, deren Meister Pythagoras durch den geheimnisvollen Zauber, der seine Reisen nach Ägypten, vielleicht auch nach Babylon, und die von dort mitgebrachten Lehren umgab, seinen Schülern wie ein höheres, nur schweigend zu verehrendes Wesen erschien. Die ionischen Naturphilosophen suchten nach einem Element, einer Substanz, die als unvergängliches Sein in dem Wechsel der Erscheinungen geeignet sei, ein Ordnungsprinzip des Wissens zu bilden. Die Pythagoreer glaubten zu bemerken, daß alles in der Kategorie der Zahlordnung aufgefaßt werden könne. Und so kamen sie

zu der Ansicht, daß diese das Unwandelbare im Flusse der Erscheinungen seien. Gewiß fand diese Idee in der Beobachtung der Tonverhältnisse, der periodisch wiederkehrenden Himmelserscheinungen, ihre Grundlage. Um so mehr mußte es daher befremden, als man in der pythagoreischen Schule die große Entdeckung machte, daß nicht alle Beziehungen durch die Verhältnisse ganzer Zahlen erschöpfbar seien. Und es erscheint die Legende wohl glaublich, daß diese Wahrheit, welche den Bestand der pythagoreischen Erkenntnis aufzuheben drohte, eine esoterische Geheimlehre war, von deren Enträtselung wir keine sichere Kunde haben, und deren unüberlegte Verbreitung strafwürdig erschien.

So entstehen nun hier die Probleme der Kontinuität, der Veränderung, der Bewegung, des Irrationalen, die Kategorien der Grenze und des Unendlichen, neben den ersten zahlentheoretischen, zum Teil auch recht schwierigen Fragen, die, wie z. B. das Problem der vollkommenen Zahlen, auch heute noch nicht völlig gelöst sind. Aber die philosophische Spekulation war noch nicht so weit erstarkt, daß man die scheinbaren Widersprüche, in die man den Zahlbegriff dem Kontinuum gegenüber verwickelt sah, hätte auflösen können. So ergeben sich die bekannten Antinomien der Eleaten, in denen auch die neueste Zeit noch immer einen des Nachdenkens würdigen Gegenstand findet. Einer der Zenonischen Einwürfe gegen die Möglichkeit einer Erkenntnis überhaupt betrifft die in der Bewegung liegenden Widersprüche: Achilles muß in einer endlichen Zeit die unendlich vielen Punkte durchlaufen, welche die vor ihm kriechende Schildkröte passiert; erst Aristoteles sucht dieses Sophisma durch die Bemerkung zu beseitigen, daß die Linie als Kontinuum etwas anderes sei als die Gesamtheit ihrer Punkte, da sonst z. B. alle Strecken, weil gleichviel Punkte enthaltend, auch gleiche Ausdehnung haben müßten. In der Tat kann man ja die Punkte von zwei beliebigen Strecken AB und ab, deren Lage so angenommen wird, daß die Geraden Aa und Bb sich in einem Punkte O schneiden, durch „Projektion des AB auf ab von O aus", in eine eindeutig umkehrbare Beziehung versetzen.

Antinomien der Eleaten.

Durch die pythagoreische Mathematik ist nun auch Plato, der Schüler des Begriffsphilosophen Sokrates, der in der Abstraktion des mathematischen Denkens die notwendige Vorstufe zu den eigentlichen Problemen der Weltweisheit erblickte, zu seinen tiefsten Gedanken angeregt. Nach ihm liegt dem mathematischen Wissen die Berufung auf ursprüngliche, außerhalb aller Erfahrung liegende, wenngleich durch sie — gleichsam durch einen Prozeß der Wiedererinnerung — geweckte Ideen, wie z. B. die der Gleichheit, des Größer- und Kleinerseins zugrunde. „Hat jemand den Begriff der Gleichheit je gesehen, da er die gleichen Steine sah? Ehe wir also anhuben, zu sehen und zu hören und die Außenwelt wahrzunehmen", heißt es im Theätet, „mußten wir in uns, irgend woher genommen, die Erkenntnis des Gleichen angetroffen haben, das, worauf wir die aus den Wahrnehmungen stammenden Gleichheiten beziehen."

Plato.

Was nun Plato seine unvergängliche Bedeutung in der Geschichte der Philosophie beilegt, das ist die Art und Weise, wie er das sokratische Verfahren

des begrifflichen Wissens auf eine ganz neue Basis stellte, die des apriorischen Elements in der Vernunfttätigkeit. Er war es, der durch die Kardinalfrage, τί ἔστι ἐπιστήμη, worin besteht Wissen, die Philosophie schuf, indem er zeigte, wie man von der μάθησις ausgehend, die Frage nach der Natur der Erkenntnis in ihrem eigentlichen Wesen erfassen könne, und mit ihm beginnt die zentrale Stellung der Mathematik in der Erkenntnistheorie.

Alles Wissen verdankt seinen Bestand nur der Verknüpfung solcher Ideen, die in uns selbst entstehen und nicht etwa wie das Rohmaterial der sinnlichen Empfindungen einzelne vorübergehende Momente in unserem Geiste, sondern das Bleibende im Charakter unserer Erkenntnis ausmachen.

Durch diese Wendung hat Plato den sophistischen Satz des Protagoras, der Mensch sei das Maß aller Dinge, der alles in eine subjektive Wertschätzung aufzulösen drohte, mit dem tiefen Gehalt erfüllt, der fortan immer das Problem des Nachdenkens geblieben ist, dem eine Auflösung dessen, was wir Wissen nennen, in bloße Empfindungsinhalte völlig unmöglich scheint, weil jedes allgemeine Urteil schon Elemente enthält, die über die bloß phänomenologischen Tatsachen hinausgehen. Doch wir haben uns mit diesen Streitfragen, die in der gegenwärtigen Erkenntnistheorie heftiger als je entbrannt sind, hier nicht zu beschäftigen.

Aristoteles.

Auch bei Aristoteles ist die Mathematik eine Quelle allgemeiner und notwendiger Wahrheiten: Ihre Konstruktionen sind nicht durch die Sinne gegeben; „der Geometer beweist wohl am einzelnen Dreieck, aber nicht durch dasselbe, denn sein Dreieck ist das durch die Vernunft erfaßte". Aber im Gegensatze zu Plato sieht Aristoteles, dem dessen Ideenlehre als ein Gegenstand des Spottes erschien, den Zusammenhang, der zwischen dem Begriff und seiner zufälligen Erscheinung in der sinnlichen Anschauung bestehen muß, in dem logischen Verhältnis eines metaphysischen Seins, τὸ τί ἦν εἶναι „des Seins, das war", und seiner Verwirklichung im „Stoff": die Musterbegriffe der Ideen sind nicht außerhalb der Dinge vorhanden. sondern die immanenten, diese hervorbringenden Formen derselben.

Die Systematik des Aristoteles, welcher den ganzen Inhalt der Erkenntnis auf gewisse oberste Aussagen des Verstandes, die Kategorien, mittels der formalen Logik zurückführte, trug sowohl vermöge ihrer für alle Zeiten feststehenden Darlegung der Formen, in denen sich das menschliche Denken bewegt, als auch vermöge ihrer unmittelbaren Beziehung auf die Wirklichkeit, den Sieg über die platonische Denkweise davon. Und während sich die letzteren schließlich in die mystische Kontemplation eines Okkultismus verlor, beherrschte der unbedingte Autoritätsglaube an die Aussprüche des „Philosophen" vom Mittelalter an und noch weit darüber hinaus das ganze Denken, das sich allerdings immer mehr von dem lebendigen Erfassen des wirklichen Geschehens loslöste. Noch im Jahre 1624 wird von der Sorbonne in Paris jeder Angriff auf die Autorität des Aristoteles, weil die Autorität der Kirche sowohl als auch alle sittliche Ordnung bestreitend, als ein todeswürdiges Verbrechen bezeichnet.

Den Alten war freilich die Beobachtung der Natur nicht fremd. Was wir gewohnt sind, auf bloße Autorität hin in der Schule als Tatsachen der Astronomie und Geographie uns anzueignen, das haben sie mit wunderbarem Scharfsinn und einer gewaltigen Beobachtungsgabe aus den kosmischen Erscheinungen abzuleiten verstanden. Dies zeigen nicht nur die Leistungen der Ägypter und Babylonier, sondern auch die der hellenistischen Zeit. Der große Astronom Hipparch entdeckt die Präzession der Tag- und Nachtgleichen, Eratosthenes führt die erste Gradmessung aus, und Claudius Ptolemäus entwirft den ersten Fixsternkatalog. Aber allmählich verkümmerte dieser lebensvolle Trieb immer mehr, und an seine Stelle traten die Irrgänge der von jeder Prüfung durch die Wirklichkeit sich entfernenden Scholastik.

Naturbeobachtung im Altertum.

Doch in zwei großen Gebieten der Erkenntnis, der Logik und der Mathematik, konnte die Überzeugung, daß es sichere Wahrheiten gebe, sich niemals völlig verlieren. Schon Augustinus sehen wir in etwas anderer Wendung den platonischen Ausspruch „μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω“ wiederholen: „Nemo ad divinarum humanarumque rerum cognitionem accedat, nisi prius artem numerandi bene addiscat“, und diese Bedeutung der Mathematik konnte auch die Scholastik nicht ganz verkennen. Besonders tritt das bei Nicolaus Cusanus (1401—1464) hervor, dessen Spekulation eine mathematische Färbung annimmt. „Nihil certi habemus nisi nostram mathematicam.“ Soll das Wissen sich über eine bloße Vermutung erheben, so muß der Verstand in sich selbst die Gewißheit finden, gleich wie aus der begrifflichen Vorstellung des Kreises, aus seiner Definition alle seine Eigenschaften folgen. „Et secundum hanc vim assimilationis formis abstractis exerit scientias certas mathematicas et comperit virtutem suam esse rebus, prout in necessitate complexionis sunt, assimilandi et notiones faciendi.“ Damit aber wird ihm die Mathematik zum Muster der Erkenntnis überhaupt, die aus den im Intellekt selbst geschaffenen Ideen fließt, nicht aus einer jenseits seiner Sphäre vorhanden gedachten Wahrheit.

Die Naturphilosophie der späteren Scholastik.

Ähnliche Gedanken treffen wir auch bei anderen Philosophen, z. B. bei Th. Campanella (1568—1639). Sind auch die Begriffe der Geometrie empirisch nie absolut verwirklicht, so scheinen sie ihm doch auf eine Realität sich stützen zu müssen. Diese erblickt er nun im absoluten Raume, dessen metaphysische Eigenschaften (Unendlichkeit, Teilbarkeit, Homogenität) so in Zusammenhang mit der Frage nach der objektiven Gültigkeit der mathematischen Ideen treten. Damit ist die Entwickelung des Raumbegriffes in der Naturwissenschaft bezeichnet, welche alsbald unter Descartes, dann unter Newton und Euler die bis in die neuere Zeit festgehaltene Form annimmt.

So sehen wir langsam eine neue Zeit hereinbrechen. Die Vertiefung in die wieder zugänglicher gewordenen Schriften des Altertums, vor allem aber das wiedererwachende Interesse für die Naturbeobachtung führen zur Überzeugung von der Wahrheit des kausalen Naturgeschehens, d. h. zum Funktionsbegriff der Mathematik, der allerdings zunächst nur fast instinktiv auftritt und sich erst später zu völlig bestimmter Auffassung ausbildet. „Wer

Die Renaissance der Naturphilosophie unter Galilei und Descartes.

die Gewißheit der Mathematik schmäht", ruft Leonardo da Vinci aus, „wird den sophistischen Lehren, die nur auf Wortstreit hinauslaufen, nie Schweigen gebieten können." Und noch schärfer kämpft Galilei gegen den scholastischen Aristotelismus, der durch bloße Syllogismen über die Wahrheit des Naturgeschehens urteilen will. „Wie würdest du, schreibt er an Kepler, lachen, wenn du hörtest, wie der angesehenste Philosoph unserer Hochschule sich abmühte, die neuen Planeten durch logische Argumente vom Himmel weg zu disputieren."

Und in dieser Renaissance des Denkens nimmt Descartes trotz seiner aus, wie es scheint, völligen Verkennung der Galileischen Prinzipien der Naturphilosophie entspringenden mannigfachen Irrtümer die zentrale Stellung ein, die ihm als Begründer der neuen philosophischen Grundanschauung gebührt, die auf der Basis der mechanischen Naturerklärung ruht.

Wissenschaft ist nur da vorhanden, wo der Gegenstand derselben vermöge einer einheitlichen Methode erfaßt wird, die als ein oberstes Prinzip allen einzelnen Erfahrungen vorangeht. „Wenn den antiken Denkern die Geometrie die Eingangspforte in die Philosophie zu eröffnen schien", sagt er, „so müssen sie in ihr eine Einheit und Gesetzlichkeit geahnt haben, die als Vorbild jedes wissenschaftlichen Verfahrens dienen kann." Und diese Überzeugung führt ihn zu dem Gedanken einer Universalmathematik, die es möglich macht, dieselben Forschungsprinzipien, wie in der Geometrie, auf den allgemeinen Inhalt aller Erfahrung anzuwenden. „Die Mathematik gefiel mir am besten durch die Sicherheit und Evidenz ihrer Gründe, aber ich wunderte mich, auf so feste Grundsätze kein größeres Gebäude aufgeführt zu sehen. Im Gegensatz dazu verglich ich die moralischen Schriften der Alten mit stolzen, aber auf den Sand gebauten Schlössern. In der Philosophie glaubte ich es nicht besser treffen zu können als alle die ausgezeichneten Geister, die seit vielen Jahrhunderten doch nichts in ihr ermittelt haben, worüber nicht gestritten wurde." Und aus dieser Überlegung ergeben sich ihm die Regulae philosophandi, die wir hier nicht aufzählen. Danach hat nur dasjenige Anspruch auf Wahrheit, was so klar und deutlich erkannt wird wie das Erlebnis des „cogito, ergo sum" und die auf unmittelbarer Gewißheit beruhenden mathematischen Axiome.

„Arithmetica et geometria caeteris disciplinis longe certiores existunt, quia scilicet hae solae circa objectum ita clarum et simplex versantur, ut nihil plane supponant, quod experienti areddiderit incertum." Und nun verbinden sich bei ihm Arithmetik und Geometrie vermöge des allgemeinen Größenbegriffes zu der Kategorie der veränderlichen Zahl. Substanz und Veränderung oder Ausdehnung und Bewegung sind die beiden fundamentalen Begriffe, auf denen die Philosophie des Cartesius die mechanische Weltanschauung begründet: „Omnia apud me mathematice fiunt." Und dem scharfsinnigen Philosophen Gassendi, der ihm entgegenhält, daß die mathematischen Begriffe, als bloße Gebilde des Geistes, keine Realität besäßen, erwidert er mit überlegener Wendung: „Si illa quae concipi possunt, ea solum de causa, quia possunt concipi, pro falsis sunt habenda, quid aliud restat, nisi id solum, quod non intelligimus, pro vero amplectamur?"

Wie nun bei Newton diese Auffassung zu einem felsenfesten Gebäude wird, das bisher allen Stürmen siegreich widerstanden hat, ist bereits oben gezeigt worden; bei ihm reifen die mathematischen Gedanken des Descartes, soweit sie sich auf mechanische Naturerklärung beziehen, zur großartigsten Vollendung. Aber von dieser Epoche an und darüber hinaus beschäftigt die führenden Denker immer die Frage nach der Erkenntnis als solcher und dem Verhältnis der mathematischen Gewißheit zu derselben. Dabei handelt es sich — zunächst wenigstens — nicht um das, was wir etwa gegenwärtig unter der Begründung der mathematischen Erkenntnis in den Gebieten der Arithmetik und Geometrie verstehen, deren Darlegung einer folgenden Betrachtung vorbehalten bleibt, sondern um die Frage, wie die als unzweifelhaft angesehene Sicherheit der Mathematik auch auf anderen Gebieten des Denkens erreicht werden könne.

Spinoza und die philosophischen Darstellung more geometrico.

Spinoza, dessen Geburtsjahr fünf Jahre vor das Erscheinen der analytischen Geometrie des Cartesius fällt, geht ganz von den Gesichtspunkten der mathematischen Demonstration aus. Ihm ist die Methode der Geometrie, weil sie sich auf Begriffe gründet, die durch die Kraft des Denkens selbst erst ihre Wirklichkeit gewonnen haben, das Vorbild der Erkenntnis überhaupt. In seiner Schrift de intellectus emendatione sagt er: „Id quod formam verae cogitationis constituit, in ipsa cogitatione est quaerendum. Ad formandum conceptum globi fingo ad libitum causam, nempe semicirculum circa centrum rotari. Haec sane idea vera est, et quamvis sciamus, nullum in natura globum sic unquam ortum fuisse, est tamen haec vera perceptio et facillimus modus formandi globi conceptum." Und so verstehen wir es, wie in Überschätzung der formalen Methode des Euklides — die noch in der Mitte des 18. Jahrhunderts in der Preisfrage der Berliner Akademie der Wissenschaften ihren Ausdruck in der Frage findet: Ob es möglich sei, den Sätzen der natürlichen Theologie und Moral die Evidenz der Mathematik zu verleihen — mit ihrer stereotypen Wendung q. e. d., in ihm der ungeheuerliche Plan entstehen konnte, alles aus einem obersten Prinzip, nämlich dem einer unendlichen Substanz, in seiner so oft als ein Beispiel unwiderleglicher logischer Schärfe angesehenen Ethik „more geometrico" herzuleiten.

Th. Hobbes.

In weit weniger willkürlicher Form treten diese Gedanken bei seinem Zeitgenossen Hobbes (1588—1679) auf. Auch er geht davon aus, daß es kein anderes Mittel gibt, einen Inhalt zu verstehen, als ihn aus seinen erzeugenden Bedingun genin uns entstehen zu lassen. Die bloßen Definitionen sind dazu freilich nicht hinreichend. Erst indem wir die Begriffe konstruieren, werden wir uns ihrer Verträglichkeit mit den Gesetzen unserer räumlichen Anschauung bewußt, und allein deshalb gibt es eine beweisbare Wissenschaft der Geometrie. Aber diese Auffassung wird nun bei Hobbes zum strengen Nominalismus. Die Wahrheit besteht nach ihm in der richtigen Zusammensetzung der „Zeichen", d. h. dieser Elemente der genetischen Konstrukion. Allerdings entspricht nicht jeder möglichen Wortverbindung auch eine mit der räumlichen Anschauung vereinbare Idee, sondern nur durch die Schöpfung der Zahl-

zeichen wird es möglich, die Erscheinungswelt einer begrifflichen Auffassung entsprechen zu lassen; „Haec omnia a numeratione proficiscuntur, a sermone autem numeratio", und es klingt ganz im Sinne der heutigen logistischen Axiomatik, welche sich schließlich von jeder Beziehung auf eine Wirklichkeit im Sinne B. Russells loslöst, wenn er sagt: „Earum tantum rerum scientia per demonstrationem illam a priori hominibus concessa est, quarum generatio dependet ab ipsorum arbitrio."

J. Locke.

Bei J. Locke (1632—1704) tritt das mathematische Element, welches bei Descartes, Spinoza und Hobbes eine so grundlegende Rolle spielt, zurück hinter der allgemeinen Frage, worauf denn der Erwerb der „evidenten Begriffe", welche Descartes als „angeborene Ideen" ansah, begründet sei. Diese Ansicht des Sensualismus, welche Sensation und Reflektion als Quelle der Erkenntnis betrachtet, ist ja auch heute noch in den erkenntnistheoretischen Schriften von Helmholtz, in der psychologischen Konstruktion der Raumanschauung, wie sie z. B. Poincaré vertritt, enthalten; wir können darauf ebensowenig eingehen, wie auf die Lehren Berkeleys, dessen Bestreitung der infinitesimalen Methoden auch jetzt noch für den Mathematiker Interesse hat.

G. W. Leibniz.

In Leibniz' (1646—1716) universellem Geiste konzentriert sich nun noch einmal die Gedankenarbeit eines ganzen Jahrhunderts, allerdings um schließlich mit der seltsamen Idee einer prästabilierten Harmonie zu enden. Auch für Descartes beruhte der letzte Grund für die Wahrheit der Erkenntnis in der Vollkommenheit Gottes, der uns nicht kann täuschen wollen. Wenn wir aber von diesen Philosophemen absehen, ist Leibniz eigentlich immer Mathematiker, der in den Begriffen der Mathematik die großen Analogien entdeckt, welche ihm das Mittel zu einer Universalmathematik liefern. Die Idee der Variationsrechnung, welche in ihren ersten Anfängen durch das Problem der Brachistochrone Bernoullis entstanden war, wird bei ihm in der Theodicee zu dem Minimumproblem, aus allen möglichen Welten die mit der kleinsten Summe des Übels behaftete zu schaffen; aus seiner Methode, von den Eigenschaften der Ellipse oder Hyperbel die der Parabel abzuleiten, abstrahiert er das Kontinuitätsprinzip, welches vermöge der Kategorie der Grenzbegriffe als leitender Grundgedanke bei ihm auftritt. Es mag als eine triviale Weisheit erscheinen, wenn Leibniz betont, daß Ruhe nichts anderes als ein stetig aus der Bewegung hervorgehender Zustand sei. Aber gerade der Mathematiker weiß, wie bedeutungsvoll diese Ansicht z. B. für die Statik ist, wenn sie begrifflich aus der Dynamik abgeleitet werden soll.

Leibniz als Philosoph und Mathematiker.

Und damit wird Leibniz zum Begründer einer mathematischen Erkenntnistheorie. Descartes hatte die Geometrie auf die Arithmetik zurückgeführt, aber diese erschien doch erst wieder gerechtfertigt durch die logische Strenge des Euklidischen Systems, welches umgekehrt die arithmetischen Prozesse aus den geometrischen Wahrheiten herleitet. Für Leibniz ist das Fundament der Mathematik der logische Satz des Widerspruches; dieser muß zur Begrün-

dung derselben hinreichen. Auf ihm müssen daher die Axiome selbst beruhen. So finden wir denn auch bei Leibniz den ersten Versuch, die Regeln des Rechnens zu beweisen, an den später H. Graßmann und Helmholtz sich angeschlossen haben, und in seiner Auffassung der Geraden als einer nach dem allgemeinen Prinzip der Ordnung wiederholten Sukzession ließen sich leicht die engsten Beziehungen zu G. Veroneses Grundlagen der Geometrie erkennen.

Aber dies gehört in eine eigentliche Erkenntnistheorie der Mathematik selbst, auf die hier nur hingedeutet werden sollte, um den Zusammenhang der geschichtlichen Entwicklung zu wahren, die nunmehr über die Leibniz-Wolfsche Philosophie, welche die tiefen Gedanken von Leibniz zu einer willkürlichen, nur scheinbar noch mathematischen Axiomatik verflachte, zu der einzigartigen Persönlichkeit Immanuel Kants (1724—1804) führt.

I. Kant.

Kant hat durch seinen Königsberger Lehrer M. Knutzen die Elemente der Mathematik, wohl vorzugsweise die der Geometrie, kennen gelernt. Von der Infinitesimalrechnung, um deren populäre Verbreitung sich der so viel geschmähte Wolf, der selbst Professor der Mathematik und Philosophie war, große Verdienste erworben hat, hat er wohl nur geringe Kenntnis erhalten*), und aus seinen arithmetischen Äußerungen erkennt man, daß ihm auch die Leibnizsche Axiomatik der Mathematik unbekannt geblieben ist. Dagegen hat er mit echt philosophischem Geiste Newtons Principia philosophiae naturalis erfaßt und zu einem förmlichen System in seinen „metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft" ausgebildet. Noch heute sprechen wir von der Kant-Laplaceschen Hypothese der Planeten-Entstehung, ein Zeichen, wie tief Kant auch in seiner „allgemeinen Naturgeschichte des Himmels" in diese Ideen eingedrungen war.

Aber das erste, was, wie er selbst sagt, seinen dogmatischen Schlummer unterbrach, waren D. Humes Untersuchungen über das Kausalitätsprinzip (1748). Der Gewißheit, daß jedem Geschehen als Ursache ein Vorausgegangenes zugrunde liegen muß, kommt nach Kant absolute Notwendigkeit und Allgemeinheit zu, die niemals aus der Erfahrung geschöpft werden kann. Denn diese lehrt nur, daß etwas so oder so beschaffen sei, nicht aber, daß es ohne Ausnahme schlechterdings so sein müsse. Und nun legt er sich die Frage Platons vor, worauf denn eigentlich Wissen gegründet sei. Mit Aristoteles erkennt er in der Verknüpfung der Urteile das Fundament desselben. Aber die Urteile scheidet er in zwei Klassen, analytische und synthetische. Ein analytisches Urteil fügt dem Subjekt nur gleichsam erinnernd ein Prädikat hinzu, das schon in ihm liegt; es erweitert das Wissen nicht. Das

*) Dies ist nicht so zu verstehen, als ob Kant die geometrischen Methoden des Unendlichkleinen, welche von Kepler, Pascal, Fermat, Huygens, Newton und vielen anderen mit so außerordentlichem Erfolge verwandt waren, unbekannt geblieben seien. Im Gegenteil zeigt sein handschriftlicher Nachlaß, so weit er bis jetzt veröffentlicht ist, daß er diese Methoden ganz selbständig anzuwenden und zur Bestätigung seiner naturwissenschaftlichen Spekulationen zu benutzen wußte. Aber von dieser intuitiven Auffassung bis zur Anwendung der eigentlichen Begriffe der Infinitesimalrechnung, z. B. des Differentialquotienten oder des Integrals, ist es doch noch ein weiter Schritt, von dem ich keine Spur bei Kant auffinde.

synthetische dagegen verbindet den Subjektbegriff mit einem neuen Begriffsinhalt zu einer Einheit; auf ihm beruht der Fortschritt des Wissens. Soll es nun ein Wissen geben, das — wie die Metaphysik z. B. behauptet — den Charakter der Allgemeinheit und Notwendigkeit hat, so muß es synthetische, nicht aus der Erfahrung geschöpfte Urteile geben. Und so beruht die Erklärung der tatsächlichen Existenz des Wissens auf der Grundfrage: Gibt es überhaupt „synthetische Urteile a priori", und wie sind sie möglich? Daß alle unsere Erkenntnis auf Erfahrung beruht, daran, sagt Kant, ist gar kein Zweifel. „Aber gleichwohl entspringt sie doch nicht allein aus derselben. Denn es könnte wohl sein, daß unsere Erfahrungserkenntnis ein Zusammengesetztes aus dem sei, was wir durch Eindrücke empfangen, und dem, was unser eigenes Erkenntnisvermögen (durch sinnliche Eindrücke dazu veranlaßt) aus sich selbst hergibt". Erkenntnisse solcher Art heißen „Erkenntnisse a priori".

Zum Beweis der Existenz solcher Urteile zieht nun Kant die Mathematik heran. Sind auch seine speziellen, der Mathematik entlehnten Beispiele nicht gerade glücklich gewählt — und dies gilt sowohl von den arithmetischen als den geometrischen — so muß doch immer wieder hervorgehoben werden, daß der eigentliche Kern seiner Gedanken dadurch nicht getroffen wird. Sowohl in der Arithmetik als in der Geometrie findet er Sätze, die, Notwendigkeit und Allgemeinheit in sich tragend, nicht aus der äußeren sinnlichen Erfahrung stammen können. Und so folgert er, daß der unterscheidende Charakter der Mathematik darin besteht, daß sie auf einer „Anschauung" beruht, die wegen ihres besonderen Wesens reine oder Anschauung a priori ist. Aber diese Anschauung ist nicht an sich der Ursprung der mathematischen Prinzipien, sondern bringt diese nur zur konkreten Darstellung durch das Mittel der begrifflichen Konstruktion. Und noch tiefer sucht Kant nun dies Verhältnis zu erfassen, indem er auf die beiden Probleme von Raum und Zeit, die Hobbes so vielfach beschäftigt hatten, eingeht. Der Raum ist für ihn kein empirischer Begriff, wie der des Gelben, der von äußeren Erfahrungen abgeleitet ist, denn er liegt jeder Aussage unserer Anschauung bereits zugrunde. Er ist auch kein diskursiver Begriff, der erst durch Abstraktion von einzelnen Räumen verschiedener Art gewonnen wird, denn für Kant existiert nur ein Raum, von dem alle besonderen Räume nur Teile sind. Das hatte auch schon Euler in seinen Réflexions sur l'espace et le temps mit den Worten ausgesprochen: Der Raum ist kein genericum.*) Er ist auch kein Begriff von Verhältnissen der Dinge, sondern Anschauung derselben, und zwar, da es sich nicht um die spezielle sinnliche handelt, reine Anschauung. Dieser etwas scholastisch gefärbten Deduktion würden allerdings die neueren Lehren von der psychologischen Entstehung der Raumanschauung widersprechen, falls es ihnen

*) Eulers Ansichten haben wahrscheinlich auf die von Kant später in der transzendentalen Ästhetik entwickelten Gesichtspunkte einen nicht unbeträchtlichen Einfluß gehabt. Daß Kant mit den Schriften Eulers wohl bekannt war, geht insbesondere aus seiner Abhandlung „Von dem ersten Unterschiede der Gegenden im Raume" (1768) hervor, in der er sich direkt auf eine Arbeit Eulers aus dem Jahre 1748 bezieht (vergleiche F. Überwegs Geschichte der Philosophie, 10. Auflage 1907, Bd. 3, S. 298).

gelingt, allgemein anerkannte Resultate zu gewinnen. — Und hierauf beruht nun nach Kant die apodiktische Gewißheit der Geometrie und ihre Übereinstimmung mit den Ergebnissen der äußeren Erfahrung. Denn nur, wenn der Raum die Form ist, durch welche letztere uns überhaupt erst möglich wird, können niemals die Aussagen der Geometrie mit denen einer empirischen Prüfung, d. h. einer konkreten sinnlichen Erfahrung, in Widerspruch geraten.

Das ist die Lehre von der transzendentalen Idealität des Raumes, welche Kant fast mit denselben Worten auf den Begriff der Zeit ausdehnt. Zeit und Raum sind für ihn zwei Erkenntnisquellen, aus denen synthetische Urteile a priori fließen, und diese Aussagen haben nicht nur transzendentale Idealität, sondern auch empirische Realität. „Wer aber absolute Realität derselben behauptet, der muß zwei ewige und unendliche Undinge annehmen, welche da sind, um alles Wirkliche zu umfassen; und wer Raum und Zeit als aus der Erfahrung abstrahierte Verhältnisse betrachtet, muß den mathematischen Lehren ihre apodiktische Gewißheit bestreiten."

Diese auf dem Faktum der Mathematik beruhenden Gedanken bilden das erste Kapitel der Kritik der reinen Vernunft; sie werden für Kant zur Direktive in der transzendentalen Logik, in der er die Wirksamkeit und die Grenzen des Gebrauchs der apriorischen Formen des reinen Denkens, der Kategorien, behandelt, — doch haben wir nicht weiter darauf einzugehen.

Romantische Philosophie in Deutschland.

Man hätte nun erwarten sollen, daß der gewaltige Einfluß der Kantischen Lehren die Philosophie in die engste Verbindung mit der Mathematik gebracht haben würde. Aber durch Fichte, Hegel und Schelling entstehen ganz neue Gedankengänge, und die romantische, auf bloßer Spekulation beruhende Naturphilosophie der letzteren beiden ließ namentlich in Deutschland eine immer größere Kluft zwischen dem mathematischen und philosophischen Denken entstehen, die zum Teil auch gegenwärtig noch nicht geschlossen ist.

J. F. Herbart. Fries und Apelt.

Indes hat es auch in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts nicht an solchen gefehlt, welche der Mathematik eine führende Rolle zuerteilen. So versucht Herbart 1824 rein mathematisch eine Statik und Dynamik der Vorstellungen nach axiomatischen Prinzipien zu entwickeln, welche den in der Mechanik üblichen analog laufen. Die mathematische Naturphilosophie von J. F. Fries (1822) — um diesen neben F. Apelt zu nennen, — trägt das Motto Τὰ μαθήματα καθάρματα ψυχῆς. In aller Schärfe hebt Fries hervor, daß wissenschaftliche Naturerkenntnis, die nach ihm allein sich auf die räumlichen Gestalten und deren Bewegungen beziehen kann, auf gewissen Vorstellungen a priori beruht, deren Darlegung die Aufgabe derselben ist. Die Möglichkeit dieser wahren Philosophie der Natur beruht immer auf gewissen, über alle Erfahrung hinausgehenden „Hypothesen" und es sind schließlich rein mathematische Gründe der Einfachheit und Übersichtlichkeit einer Theorie, welche z. B. die Entscheidung zugunsten des Kopernikanischen Weltsystems im Gegensatz zu dem epizyklischen System des Ptolemäus treffen lassen. Wer wird hier nicht an E. Machs Prinzip der Ökonomie des Denkens erinnert? Und so ist auch das Prinzip der Trägheit eines Beweises

weder fähig noch bedürftig; mit fast denselben Worten wie neuerdings Poincaré in der Schrift, Wissenschaft und Hypothese, spricht Fries es aus, daß dasselbe eine Annahme a priori sei, die niemals durch Erfahrung bewiesen noch widerlegt werden könne. Die Bestrebungen von Fries und Apelt sind nicht untergegangen, sie leben fort in den Abhandlungen der Friesschen Schule, welche mathematisches und philosophisches Denken den modernen Anschauungen gemäß in Verbindung setzen wollen. Aber auch auf anderen Seiten regt sich das Bedürfnis, die Wechselbeziehungen zwischen diesen beiden Gebieten enger zu gestalten. „Das Schicksal und die Zukunft der kritischen Philosophie", sagt E. Kassirer in seinen Kantstudien, „wird durch das Verhältnis zu den exakten Wissenschaften bedingt. Wenn es gelänge, das Band zwischen ihr und der Mathematik und der mathematischen Physik zu durchschneiden, so wäre sie damit ihres Inhaltes und ihres Wertes beraubt. Von diesem Gesichtspunkt aus darf jeder Versuch einer logischen Klärung und Vertiefung der Grundlagen der Mathematik von vornherein des größten philosophischen Interesses gewiß sein."

Mathematik und Philosophie in der Gegenwart.

Und dieses Interesse bekundet sich nicht nur in der neuen Ausbildung, welche die aristotelische Logik zu einer modernen Logistik erfahren hat, sondern auch in dem wachsenden Verständnis, welches die Philosophie gegenwärtig dem in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gewonnenen erkenntnistheoretischen Gehalt der Mathematik zuwendet. Wir erinnern an die zahlreichen Arbeiten Poincarés und anderer französischer Philosophen und Mathematiker, an die Veröffentlichungen der Marburger durch Natorp inspirierten Schule, an die namentlich von Peano entwickelte italienische Axiomatik, an die eigenartigen Arbeiten B. Russells, mit denen die auf deutschem Boden erwachsene Mengenlehre G. Cantors in enger Beziehung steht.

Wie lückenhaft auch dieser Versuch ausgefallen sein mag, auf wenigen Seiten die seit mehr als zwei Jahrtausenden bestehende Wechselwirkung zwischen Mathematik und Philosophie zu skizzieren, das wenigstens dürfte daraus hervorgehen, wie eng tatsächlich das Band zwischen beiden ist.

Und wer die Kultur der Gegenwart verstehen will, wird auch an diesen Beziehungen nicht achtlos vorbeigehen können. Diese Erkenntnis hat seit Platons Zeit dazu geführt, der Mathematik einen hohen Wert als Erziehungsmittel beizulegen. Denn einer der vornehmsten Zwecke aller Erziehung ist es, Bildung, d. h. Verständnis für die Kultur der jeweiligen Zeitepoche zu wecken, und dadurch die heranwachsende Generation zu befähigen, diese Kultur den kommenden Geschlechtern erweitert zu überliefern.

Mathematik und Bildung durch Erziehung.

Schulwesen.

Von dieser Überzeugung waren auch die Begründer der Humanistenschulen geleitet. Zwar wird in den Lehrplänen vieler Gymnasien des 16. und 17. Jahrhunderts die Mathematik noch nicht ausdrücklich als Lehrmittel erwähnt; sie war nach alter Sitte mit dem Quadrivium: Musik, Arithmetik, Geometrie, Astronomie, verbunden. Aber Melanchthon, der praeceptor Germaniae, setzte schon 1529 die Gründung einer zweiten mathematischen Professur in Wittenberg durch. An den größeren Handelsstädten Deutschlands,

Frankfurt, Hamburg, Lübeck, Straßburg und Nürnberg wirkten bald hernach treffliche Mathematiker, wie Dasypodius und Sturm an den beiden letztgenannten. Gegen das Ende des 17. Jahrhunderts tritt allerdings eine Reaktion ein; an die Stelle akademisch gebildeter Lehrer treten öfter bloße Rechenmeister, und mit ihnen wird auch ihr Lehrfach nun als nicht ebenbürtig mit den klassischen Studien angesehen: „Mathematicus non est collega." Die Begründung der Realschulen unter Franke und Ernesti zu Anfang des 18. Jahrhunderts führt zu einer verstärkten Betonung des mathematischen Elements; fast in vollem Umfange wird an ihnen das, was wir gegenwärtig zur Elementarmathematik rechnen, in die Lehrpläne aufgenommen, eingedenk des Gesnerschen Dictums „privat se altro oculo, qui negligit mathesin".

Höhere und elementare Mathematik.

Mit dem Anfang des 18. Jahrhunderts tritt aber zugleich die ungeheure Fortbildung der Mathematik durch die Erfindung der Infinitesimalrechnung ein. Diesem großen Fortschritt, der, mit der Fortbildung der Leibnizschen Gedanken, insbesondere der Integralrechnung durch Leibniz selbst und die Bernoullis in den Leipziger Actis eruditorum beginnend, fast ausschließlich dem bewunderungswürdigen Verkehr zwischen den führenden Mathematikern an den Akademien in Berlin, Paris, Petersburg zu verdanken ist, vermochte das allgemeine Verständnis der damaligen Lehrerwelt nur in beschränktem Umfange zu folgen. So entstand neben der Mathematik der Alten eine esoterische „höhere", die nur hervorragenden Geistern zugänglich schien, um so mehr, als auch der dürftige Unterricht an den Hochschulen meist nur in einer Rekapitulation der Schulpensa bestand, wie sie denen erwünscht sein mußte, die auf der Schule kaum über die vier Spezies und die ersten Bücher des Euklid hinausgekommen waren.

Erst das 19. Jahrhundert hat der Mathematik ihre Stellung als ein den sprachlichen Studien gleichstehendes Bildungsmittel zurückgegeben. An die Erhebung Deutschlands unter Preußens Führung in den Befreiungskriegen knüpfen sich die Vorschläge von W. von Humboldt und der Süvernsche Lehrplan, der 1816 die Mathematik an allen Klassen der Gymnasien endlich in ihr Recht einsetzte und — wenn auch nicht zur Einführung gelangend — doch zu einer idealen Richtschnur wurde, welche im wesentlichen den Vertretern einer einsichtsvolleren Pädagogik vorschwebte. Die bereits in Süverns Entwurf betonte Notwendigkeit, auch die Grundgedanken der höheren Mathematik in den Lehrplan der Schulen aufzunehmen, durch welche, wie schon der General Clausewitz es aussprach, erst das wahre Verständnis für die elementare gewonnen werden kann, ist freilich erst in der neuesten Zeit in ihrer ganzen Bedeutung erkannt worden.

Aber ganz abgesehen von der Geschichte der mathematischen Pädagogik haben wir uns zu fragen: Worin beruht der Wert der Mathematik als Bildungsmittel für die Jugend?

Mathematik und Logik.

Es ist ein unbegründetes Vorurteil, wenn man — insbesondere in populären Schriften — die Mathematik als Hauptmittel zur Erzielung logischen Denkens bezeichnet. Verstöße gegen dasselbe sind von Mathematikern eben-

so häufig gemacht worden, wie von anderen, selbst die Bücher des Euklid sind nicht frei von ihnen, und auch in den modernen Lehrbüchern dürfte nicht selten die kritische Prüfung Mängel sowohl im sprachlichen Ausdruck als in der sachlichen Behandlung entdecken. Zudem wirkt der Denkprozeß bei den meisten Menschen auf einer gewissen Entwicklungsstufe so automatisch, daß man ebensowenig wie zum richtigen Gebrauch der Muttersprache eines besonderen Unterrichts in der Logik bedarf. Die Logik lehrt nicht richtig denken, sondern zeigt nur, wann richtig gedacht ist. Entscheidender aber ist, daß das rein logische Element, wie es Euklid als Ideal vorschwebte, in der Mathematik viel zu schwer durchführbar und für den jugendlichen Geist geradezu unverständlich ist. Wer die Mathematik nur als logisches Exerzitium behandelt, wird schwerlich große Erfolge bei seinen Schülern finden: das gilt nicht nur vom Unterricht auf der Schule, sondern — cum grano salis — auch von dem auf der Hochschule.

Erzieherische Bedeutung der Mathematik.

Die Stärke der Mathematik als Bildungsmittel liegt vielmehr vorwiegend nach der ethischen Richtung und nach der einer freien, schöpferischen Verstandesbildung. Gewiß werden in den historischen Fächern, insbesondere durch das Studium der fremden Sprachen Kenntnisse erworben, die für unsere Bildung unerläßlich sind. Aber solche Kenntnisse sind eben keine Erkenntnis. Diese aber vermittelt die Mathematik. Wer den Beweis eines Satzes verstanden hat, hat damit die Überzeugung gewonnen, eine Wahrheit auf Grund eigener Arbeit erfaßt zu haben. Die Übersetzung eines griechischen oder lateinischen Autors ist ja freilich nicht selten auch eine Rätselaufgabe der Kombinatorik; sie wird aber kaum dieselbe absolute Überzeugung von ihrer Richtigkeit gewähren. Durch einen mathematischen Beweis wird aber nicht nur das sichere Bewußtsein, daß man durch Denken Wahrheit finden könne, geweckt, sondern auch das Selbstvertrauen zum eigenen Verstand, die kritische Urteilskraft, welche den wahrhaft Gebildeten von dem im bloßen Autoritätsglauben Befangenen unterscheidet. Diese Fähigkeit herauszubilden, ist wohl das höchste Ziel, welches sich die Erziehung des jugendlichen Geistes stellen kann.

Und das nicht allein. Mit der gelungenen Übersetzung eines Schriftstellers ist die Arbeit abgeschlossen. In der Mathematik aber weckt jede erkannte Wahrheit, jede gelöste Aufgabe, sofort die schöpferische Phantasie, die sie entweder zu erweitern oder ihren noch verborgenen Zusammenhang mit anderen Wahrheiten aufzufinden strebt. Das ist jenes unbeschreiblich hohe Gefühl, das jeder empfindet, der zum erstenmal die Selbständigkeit seines eigenen Geistes in der freien wissenschaftlichen Arbeit erkennt, der seine schöpferische Kombinationsgabe mit jedem erfolgreichen Schritte wachsen sieht.

Kritischer Blick, Energie in der Überwindung anscheinend hoffnungsloser Schwierigkeiten, beharrlich auf das Ziel gerichteter Wille, Selbstvertrauen auf die eigene Kraft, sind ethische Kräfte, deren jeder bedarf, um im Kampfe des Lebens nicht zu unterliegen. Es dürfte schwer sein, ein Bildungsmittel zu be-

zeichnen, das geeigneter wäre, diese Qualitäten zu wecken und zu den höchsten Leistungen zu befähigen, als die Mathematik.

Aber auch ihr Inhalt ist nicht ein bloßes Paradigma des Erkennens. Wie oft hört man, daß über dem grammatikalischen Studium eines Schriftstellers der Inhalt als nebensächlich dem Bewußtsein der Schüler entschwindet! Das fällt allerdings dem betreffenden Unterrichte selbst zur Last, und ist gewiß auch nicht das allgemeine Ergebnis unserer heutigen Gymnasialbildung, welche der bloße Nützlichkeitsstandpunkt häufig verurteilt, ohne sie eigentlich zu kennen oder ihren Segen erfahren zu haben. Wer die poetischen, historischen und philosophischen Werke der Alten in ihrem inneren Gehalte in sich aufgenommen hat, hat damit sicher etwas gewonnen, dessen Besitz ihn in den engsten Zusammenhang mit der Blüte unserer gegenwärtigen Kultur bringt. Aber ebenso wahr ist es, wenn H. Schellbach, selbst ein trefflicher Mathematiker, der in diesem idealen Sinne gewirkt hat, sagt: „Wer die Mathematik und die Resultate der neueren Naturforschung nicht kennen gelernt hat, der stirbt, ohne die Wahrheit zu kennen."

Mathematische Pädagogik in der neueren Zeit.

Noch mag unser höheres Schulwesen von diesem hohen Ziele Schellbachs mehr oder weniger weit entfernt sein. Aber in immer steigendem Maße hat die seit 1890 gegründete Deutsche Mathematikervereinigung im Anschluß an die Initiative F. Kleins darauf hingewirkt, einen neuen Geist in den mathematischen Unterricht auf unseren Schulen einzupflanzen, den des funktionalen Denkens, auf dem in letzter Instanz unsere moderne Kultur beruht, und damit die Möglichkeit, Verständnis für ihre großartige Entwicklung in den beiden letzten Jahrhunderten durch eine angemessene Vorbereitung dem jugendlichen Bewußtsein näher zu rücken. Diese Bestrebungen sind auf einen fruchtbaren und auch im Gebiete der Schule selbst schon vorbereiteten Boden gefallen. Davon zeugen die vielfachen Versuche der Pädagogen, das Programm der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (Meran 1905), zu unterstützen, und an der Hand ihrer eigenen Erfahrungen zu verwirklichen. Und so darf wohl erwartet werden, daß im 20. Jahrhundert auch in Deutschland die mathematische Vorbildung in dem geistigen Besitz unserer wirklich Gebildeten eine umfassendere und verständnisvollere Stellung einnimmt, als dies zurzeit der Fall ist.*)

*) Man wird dies um so mehr wünschen müssen, als in anderen Staaten Europas die Mathematik schon längst einen weit höheren Grad öffentlicher Geltung erlangt hat. Wir erinnern nur daran, wie wichtig es bereits Napoleon erschien, auf seinem ägyptischen Feldzuge von einem Mathematiker, wie G. Monge, begleitet zu sein; wir weisen ferner hin auf die beiden großen französischen Institute der École polytechnique und der École normale supérieure, aus denen so manche Persönlichkeiten hervorgegangen sind, die sich gleichzeitig als Mathematiker, Ingenieure, Offiziere und Staatsmänner ausgezeichnet haben und zu den höchsten staatlichen Würden gelangt sind, sowie an die in alle Zweige des Unterrichtes eingreifende Tätigkeit, welche in Italien F. Brioschi und L. Cremona vermöge ihrer hohen amtlichen Stellung ausüben konnten.

In den letzten Jahren haben übrigens die deutschen Bestrebungen eine erhöhte Bedeutung gewonnen durch die Entstehung einer Internationalen mathematischen

Wir haben bisher nur die Beziehungen der Mathematik zu dem Umfange unserer gegenwärtigen Kultur betrachtet. So erscheint sie uns als eine Wissenschaft, ehrwürdig durch ihren bis auf die früheste historische Überlieferung hinaufreichenden Ursprung, als unentbehrliches Mittel, die großen Erscheinungen des Naturgeschehens zu verstehen, als die Quelle, aus der das nach Erkenntnis ringende Denken seine tiefsten Anregungen geschöpft hat, als ein seit der Zeit der Hellenen gepflegtes Bildungsmittel der Jugend. Keine andere Wissenschaft stellt uns so deutlich die Tatsache vor Augen, daß es eine erkennbare Wahrheit gibt, deren Inhalt, unabhängig vom Wechsel der Zeiten, unerschüttert durch die gewaltsamen Katastrophen im Leben der Völker, für jeden verbindlich ist. Dieselben Probleme, welche unter den Pythagoreern zum ersten Male aufgeworfen wurden, können, unendlich vertieft und durch die fortschreitende Erkenntnis gereinigt, uns auch heute noch beschäftigen.

Objektiver Wert der Mathematik.

Und darin besteht nun auch der objektive Wert der Mathematik, ganz unabhängig von aller praktischen Anwendung auf irgendein menschliches Tun. Den Nutzen derselben für die Zwecke des Handelns hat man zwar nie bestritten. Aber aus dieser unverkennbaren Nützlichkeit derselben hat sich die Ansicht gebildet, als sei sie nur eine formale Methode, eine Hilfswissenschaft, deren Resultate man zu schätzen wohl nicht umhin kann, während das, was den eigentlichen Gegenstand des forschenden Mathematikers bildet, ein überflüssiges Spiel der Gedanken sei, das keinen Zusammenhang mit der lebendigen Wirklichkeit hat. Solche Meinungen sind nicht nur unter den der Mathematik fernerstehenden Kreisen verbreitet, sie sind gelegentlich auch von Gelehrten unzweifelhaft hoher Bedeutung ausgesprochen. In seiner Inauguralrede 1874 sagt P. Du Bois-Reymond, es sei Täuschung, zu glauben, daß die Arbeit des Mathematikers von dem Wunsche beseelt sei, unsere Kenntnisse zu erweitern, für die Praxis nützliche Methoden zu schaffen. Auf die Frage, was sie wolle, erhalte man niemals eine Antwort. Kein Mathematiker habe ein Grundproblem, keiner sehe ein Ende seiner Forschungen, die nur willkürlich formulierte Probleme seiner Einbildungskraft seien. Seine Arbeit sei schließlich nichts anderes als ein Sport, dem des Alpinisten oder des Schachspielers vergleichbar, allerdings ein durch die Stille der geistigen Beschaulichkeit veredelter. Wie unrichtig diese Auffassung ist, der wir um so mehr entgegentreten möchten, als sie von einem Manne herrührt, der sich selbst so ernstlich um die philosophische Klärung der Grundfragen der Mathematik bemüht hat, zeigt schon seine eigene Persönlichkeit. Du Bois hatte gewiß ein Grundproblem, dem er sein ganzes Leben gewidmet hat, die Darstellung allgemeiner Funktionen durch Reihen, und dieses hat er, beginnend mit dem einfachsten Falle der unbedingt konvergenten Reihen, bis zu den weitesten für ihn erreichbaren Grenzen durchgeführt. Und sind nicht die Arbeiten von Euler, Lagrange, Gauß, Cauchy,

P. Du Bois-Reymonds Inauguralrede.

Unterrichtskommission, deren Aufgabe es ist, die hinsichtlich der pädagogischen Behandlung des mathematischen Unterrichtes in seinem gesamten Umfange in den verschiedenen Staaten gemachten Erfahrungen zu vergleichen und durch gemeinsame Beratungen zu verwerten.

Riemann, Weierstraß, Lie, um nur einige Namen nicht mehr der Gegenwart angehöriger Mathematiker zu nennen, jedesmal von einem in voller Klarheit sich ausprägenden Grundgedanken durchzogen? Jede Zeile Eulers ist beseelt durch die wunderbare Klarheit, mit der er alles, was sich seinem Geiste darbot, dem mathematischen Kalkul zu unterwerfen wußte, gleich einem Pionier, der in ein unbekanntes Land vordringt. Bei Lagrange erkennen wir die systematische Eleganz, mit der er die Grundlagen der Mechanik, von dem einfachen Problem der Fallbewegung bis zu den abstraktesten Aufgaben der Hydrodynamik mittelst der Variationsrechnung zu formulieren weiß, während die unübertroffene Universalität von Gauß mit gleichförmiger Kraft alle Gebiete des Wissens bereichert. Cauchys großes Ziel war es, die Prinzipien der Infinitesimalrechnung zu erforschen und zu neuen Aufgaben durch die Einführung des Imaginären zu befähigen. In jeder Arbeit Riemanns erkennen wir den ihm eigentümlichen Gedanken, das Wesen der Funktion einer komplexen Variabeln durch ihre Grenzbedingungen zu definieren, mag es sich nun um die Theorie der algebraischen Funktionen oder um die der Differentialgleichungen handeln, während Weierstraß auf dem Boden des arithmetischen Funktionsbegriffes mit gleicher Schärfe die Grundlagen der Arithmetik wie die höchsten Probleme der Analysis behandelt. Endlich ist es bei Lie der Begriff der Transformationsgruppen, d. h. der einer Gesamtheit von analytischen Operationen, der bei allen Zusammensetzungen dieser Operationen untereinander einen in sich abgeschlossenen Inhalt, einen ,,Körper" im Sinne der Algebra darstellt, von dem aus der ganze Inhalt der Analysis und Geometrie seine eigentümliche Beleuchtung erhält: so erkennen wir überall das Vorhandensein großer Gedanken, in denen sich zugleich die Wesenseigentümlichkeit ihrer Schöpfer offenbart.*) Freilich wird es auch viele Mathematiker geben, die, ohne von einer für ihre Produktionsweise charakteristischen Idee beherrscht zu sein, ihre Probleme den wechselnden Anregungen entnehmen, welche ihnen die Vertiefung ihres eigenen Studiums darbietet. Aber auch sie leitet der Wunsch, ihr eigenes Wissen mit den großen Schöpfungen bevorzugter Geister in Verbindung zu setzen.

Aber wir berühren damit den anderen Einwurf von Du Bois. In der Freiheit der mathematischen Gedankenbildung, die alles, was Gegenstand von Zahloperationen werden kann, ergreift, scheint etwas zu liegen, das an ein mehr oder weniger willkürliches Spiel erinnert. Was unterscheidet die Arbeit des Mathematikers vom Spiel?

Mathematik und Spiel.

Das Schachspiel hat man oft mit der Tätigkeit desselben verglichen. Auch hier haben wir Symbole, die nach bestimmten Regeln miteinander zu neuen Kombinationen sich verbinden; man könnte geradezu eine Schachpartie als eine Reihe diskreter Transformationen ansehen, bestimmt, eine Transformation von vorgeschriebenem Charakter hervorzubringen. Zudem hat das Schach-

*) Wir haben uns hier absichtlich auf die Erwähnung bereits verstorbener Mathematiker beschränkt, ebenso treffende Beispiele ergeben sich aber auch aus der charakteristischen Forschungsweise der ausgezeichneten Mathematiker der Gegenwart.

spiel selbst zu mathematischen Problemen angeregt. Wir erinnern nur an die magischen Quadrate und Eulers zahlentheoretische Lösungen des Rösselsprunges. Eine mathematische Theorie des Schachspiels aber gibt es bislang nicht. Sie würde voraussetzen, daß jeder Zug nach irgendeiner Regel, ob ein- oder mehrdeutig, bestimmbar sei. Damit würde aber der Charakter des Spiels sich aufheben. Denn dieser beruht auf der Freiheit des Handelns, die bei jedem Zuge, wenn auch durch den kombinierenden Verstand geleitet, möglich bleibt, und auf dieser Freiheit der Willensentscheidung beruht — abgesehen von der Hoffnung des Sieges — der wesentliche Reiz dieses Spiels.

Ähnlich dürfte es sich aber bei jedem Spiel, das nicht, wie die bloßen Glücksspiele, nur den die Leidenschaften erregenden Momenten der Zufälligkeit seine Anziehungskraft verdankt, verhalten: Das Spiel gewährt eine subjektive, auf der Freiheit des Handelns beruhende Befriedigung. Ist auch hier mit diesem kurzen Ausdruck sein Wesen nicht völlig erschöpft, so folgt doch daraus, daß das Spiel seinen Charakter verliert, sobald es in derselben Weise wiederholt, d. h. die Freiheit des Willens dabei aufgehoben wird. Sein Verlauf hat daher lediglich eine individuelle Bedeutung, die, nur einmal vorhanden, mit seiner Beendigung aufhört.

Ganz anders aber ist es bei der freien Schöpfung mathematischer Gedanken. Sie entspringen wie ein Quell aus verborgenen Tiefen, sie schreiten vielleicht anfangs nicht auf der geradesten Bahn fort, aber allmählich dringen sie vor zu jener Bestimmtheit, welche den Stempel einer allgemeingültigen Wahrheit trägt. Damit wird das, was der oberflächlichen Betrachtung zuerst als ein Spiel der Gedanken erschien, zu einer Erkenntnis, welche wiederum jeder durch erneute geistige Arbeit zu seinem Eigentum machen kann. Und so entsteht ein unverlierbares geistiges Besitztum der Menschheit, welches zu pflegen und zu fördern uns eine höhere sittliche Verpflichtung gebietet. Wer könnte verkennen, daß in diesem Reich der Gedanken, das, für jeden zugänglich, jeder auf seine Weise entwickeln kann, sich in der reinsten Form der Trieb des Geistes offenbart, sich seiner eigenen Kraft bewußt zu werden?

Mathematik als Inbegriff einer geistigen Schöpfung.

Daß diese Arbeit aber auch den allgemeinsten Interessen der Kultur dient, lehrt die Geschichte. Hätten die Griechen, unbekümmert um eine praktische Anwendung, nicht die Theorie der Kegelschnitte entwickelt, so würde Kepler wohl kaum das Geheimnis der Planetenbewegung enträtselt haben. Ohne das ganz abstrakte Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, ohne die Theorie der Funktionen komplexer Zahlen läßt sich kaum eine Untersuchung, sei es in der Mechanik, der Hydrodynamik, der Elektrizitätslehre durchführen. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen, rein mathematisch zunächst ohne Beziehung auf direkte physikalische Anwendung, ist heute zum unentbehrlichen Rüstzeug für den theoretischen Physiker geworden und die Untersuchungen Poincarés über Integralinvarianten und asymptotische Lösungen haben der Mechanik des Himmels ganz neue Gesichtspunkte eröffnet. Auch von der Mathematik gilt das Wort W. von Humboldts: „Die Wissenschaft gießt oft

dann ihren reichsten Segen über das Leben aus, wenn sie sich von demselben gleichsam zu entfernen scheint."

Mathematische und künstlerische Produktion.

Eher mag man den objektiven Wert der Mathematik mit dem der künstlerischen Tätigkeit vergleichen. Ursprünglich dient auch die Kunst der subjektiven Befriedigung, aber darüber hinaus erhebt sie sich zu Schöpfungen, in denen wir eine Offenbarung der höchsten produktiven Kraft erkennen. Auch diese liegen nicht auf der Oberfläche, aber sie werden für jeden, der ihrem Gehalt mit Sorgfalt zu folgen vermag, zu einer Quelle der Erhebung über das Irdische, der niemand einen objektiven Wert absprechen wird. Ein klassisches Kunstwerk ist der adäquate Ausdruck eines Ideals, dem kein Strich hinzugefügt noch genommen werden kann, ohne den Charakter des Ganzen in Frage zu stellen. Dasselbe Merkmal einer in sich ruhenden Vollkommenheit aber tragen auch die mathematischen Theorien. Und mit der schaffenden Kunst teilt die Mathematik auch den divinatorischen Charakter. Neue mathematische Gedanken und Erkenntnisse fundamentaler Art entspringen in den meisten Fällen einer unmittelbaren Intuition, deren exakte Begründung die weitere Arbeit des Forschers ist. So ist die Mathematik nicht nur eine bloß formale Wissenschaft, eine Eidologie, welche alles sub specie matheseos betrachten lehrt, sondern sie hat auch einen objektiv wertvollen Inhalt, als ein Reich der Gedanken, das in vollendeter Harmonie die einfachsten und abstraktesten Gebilde des Verstandes lückenlos verbindet, als eine Offenbarung des Geistes, die immer reicher zu entfalten eine der würdigsten Aufgaben unseres Geschlechtes bildet.

Internationale Verbreitung der Mathematik.

Dieser universellen Bedeutung der Mathematik entspricht nun auch ihre internationale Verbreitung. Während diese im 18. Jahrhundert sich noch fast ganz auf die Akademien Europas beschränkte, regt sich um die Wende desselben die Kraft zu einer weit allgemeineren Produktion in besonderen mathematischen Zeitschriften. Die Geschichte dieser schon ein Jahrhundert umfassenden Literatur verdiente wohl eine ausführlichere Behandlung; hier können nur einzelne Züge derselben angedeutet werden. Den Anfang machen in Frankreich nach der Gründung des Journals de l'École Polytechnique 1796 die Gergonneschen Annalen 1804, dann das Liouvillesche Journal 1836, die Nouvelles Annales 1842, die Annales de l'École Normale 1865, die Bulletins des sciences math. von Darboux und der Société math. de France, mit denen sich die 1835 begründeten Comptes Rendus de l'Académie des sciences verbinden. In Deutschland entstehen nach dem unter Hindenburg in Leipzig gemachten Anfange (1781) das Crellesche Journal 1826, das Archiv für Mathematik und Physik 1843, die Zeitschrift für Mathematik und Physik 1856, die Mathematischen Annalen 1869, die Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 1870. Besonders bedeutungsvoll erscheint auch der mathematische Inhalt der in den Schriften der Akademien und gelehrten Gesellschaften von Berlin, Göttingen, Heidelberg, Leipzig und München veröffentlichten Arbeiten. In Österreich finden wir neben den Berichten der Wiener Akademie die Monatshefte für Mathematik und Physik (1890), denen

sich wieder die zahlreichen Veröffentlichungen in Ungarn anreihen. In England erscheinen neben dem Philosophical Magazine, den mathematischen Journalen von Cambridge 1839, sowie Cambridge und Dublin 1856, dem Quarterly Journal, den Proceedings der London Math. Society noch eine ganze Reihe von Transactions der Akademien von London, Edinburgh, Cambridge, Dublin. In Italien werden 1850 die Annali di Scienze, 1858 die Annali di matematica, 1863 das Giornale di matematiche, 1888 die Rendiconti di Palermo, 1891 die Rivista di matematica begründet, daneben enthalten die zahlreichen Akademien eine große Literatur. In Rußland entsteht 1866 die Moskauer mathematische Gesellschaft, zu der die Arbeiten der mathematischen Gesellschaften in Charkow, Kiew, Kasan, Warschau hinzukommen.

Auch die übrigen Staaten, Dänemark mit dem Nyt Tidsskrift for Matematik, Schweden mit seinen Acta mathematica 1882, den stammverwandten Acta societatis Fennicae, der Bibliotheca mathematica und den Schriften von Upsala und Lund; Norwegen, Holland mit seinen verschiedenen Archiven und die Schweiz bleiben nicht zurück; selbst Indien und weit bedeutungsvoller Japan tritt in Wettbewerb mit den Arbeiten der alten Welt. Und Nordamerika hat sich eine ausgebreitete Literatur in dem American Journal, den Annals of Mathematics, dem Bulletin und den Proceedings der mathematischen Gesellschaft, den Transactions seiner großen Universitäten geschaffen.

Gegenwärtig erscheinen gegen 140 vorwiegend rein mathematischen Zwecken gewidmete Zeitschriften, der kleineren periodischen, mehr einem lokalen Bedürfnisse entsprechenden Publikationen nicht zu gedenken. Es wäre eine interessante Aufgabe, in dieser gewaltigen Produktion, für die das Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik seit 1868, die große deutsche und französische mathematische Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, die allgemeinen Enzyklopädien Englands und Amerikas eine überaus wertvolle Übersicht bieten, die besonderen mathematischen Interessen aufzusuchen, in denen die wissenschaftlichen Richtungen der verschiedenen Nationen zum Ausdruck kommen.

In dieser allgemeinen Verbreitung der Mathematik, welche in Deutschland durch die seit 1822 bestehende Naturforscherversammlung, durch die 1890 gegründete Deutsche Mathematiker-Vereinigung, dann durch internationale Kongresse (seit 1897) ein erhöhtes Leben im persönlichen Gedankenaustausch erhalten hat, erkennen wir ebenfalls die hohe Bedeutung, welche der Mathematik in der Kultur der Gegenwart zukommt. So nimmt die mathematische Gedankenwelt, überall dieselbe dem Fachmanne verständliche Sprache redend, über allen Streit ihrem inneren Wesen nach erhaben, unberührt von den Sonderinteressen, welche den Frieden der Nationen zu stören drohen, in dem gesamten Reich der kulturellen Bestrebungen und damit in der fortschreitenden Entwickelung des Menschengeschlechtes eine ganz hervorragende Stelle ein.

Literatur.

M. PASCH, Über den Bildungswert der Mathematik, Festrede, Gießen 1874; H. THIEME, Der Bildungswert der Mathematik, Pädagogisches Archiv 1897, Bd. 39; F. LINDEMANN, Lehren und Lernen in der Mathematik, Festrede, München 1904; F. KLEIN, Vorträge über mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, bearbeitet von R. Schimmack, Leipzig 1907; A. GUTZMER, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Leipzig 1908; M. SIMON, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik, 2. Auflage, München 1908; M. SIMON, Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte, Berlin 1909; M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 4 Bde. 1901—1907; A. HÖFLER, Didaktik des mathematischen Unterrichts, Leipzig und Berlin 1910.

H. HANKEL, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, (1869), 2. Auflage, Tübingen 1884; J. J. SYLVESTER, Report of the British Association 1869; A. R. FORSYTH, ebenda 1898; P. DU BOIS-REYMOND, Was will die Mathematik und was will der Mathematiker, Rede, Tübingen 1874, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 19, 1910; W. VON DYCK, Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und angewandten Mathematik, Festrede, München 1891; E. JAHNKE, mathematische Forschung und Technik, Festrede, Berlin 1910; A. PRINGSHEIM, Über den Wert und angeblichen Unwert der Mathematik, Festrede, München 1904; P. STÄCKEL, Geltung und Wirksamkeit der Mathematik, Festrede, Karlsruhe 1910, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 20, 1910.

W. WHEWELL, History of the inductive sciences, London 1857; J. TH. MERZ, A History of European Thought in the XIX Century, 2. vols, Edinburgh 1903; É. PICARD, La science moderne et son état, Paris 1905; H. POINCARÉ, Wissenschaft und Hypothese, Deutsche Ausgabe von F. und L. Lindemann, 2. Auflage, Leipzig 1906; H. POINCARÉ, der Wert der Wissenschaft, deutsch von E. und H. Weber, Leipzig 1906; M. PLANCK, Das Prinzip der Erhaltung der Energie, 2. Auflage, Leipzig 1908; W. VOIGT, Über Arbeitshypothesen, Göttinger Nachrichten, Geschäftliche Mitteilungen, 1905, Heft 2; P. VOLKMANN, Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften, Leipzig, 1906; E. MACH, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, 6. Auflage, Leipzig 1908; L. QUETELET, Physique Sociale, 1869; G. TH. FECHNER, Kollektivmaßlehre, herausgegeben von G. F. Lipps, 1907, H. BRUNS, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig und Berlin, 1906; G. F. LIPPS, Die psychischen Maßmethoden, Leipzig, 1906; E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 2 Bde., Leipzig 1908, 1910; K. E. RANKE, Theorie der Korrelation, Archiv für Anthropologie, Bd. 32, 1906; W. BETZ, Über Korrelation, Zeitschrift für angewandte Psychologie, Beihefte, 3, Leipzig 1911; O. KLEMM, Geschichte der Psychologie, Leipzig, 1911.

H. St. CHAMBERLAIN, Die Grundlagen der Kultur des XIX. Jahrhunderts, München 1906; S. GÜNTHER, Geschichte der Naturwissenschaften, Leipzig 1909; C. G. J. JACOBI, Über Descartes' Leben, Gesammelte Abhandlungen, Bd. VII; H. COHEN, Platons Ideenlehre und die Mathematik, Marburg, 1878; J. F. FRIES, Die mathematische Naturphilosophie, Heidelberg, 1822; W. LEXIS, Das Wesen der Kultur, Kultur der Gegenwart, Bd. I; C. STUMPF, Zur Einteilung der Wissenschaften, Abhandlungen der Berliner Akademie, 1906; E. KASSIRER, Kant und die moderne Mathematik, Kantstudien XII, Berlin 1901; Derselbe, Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit, Berlin 1907; Derselbe, Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Berlin 1910.

DIE VERBREITUNG MATHEMATISCHEN WISSENS UND MATHEMATISCHER AUFFASSUNG.

Von H. E. Timerding in Braunschweig.

Einleitung.

Aufgabe dieser Arbeit.

Die Aufgabe der folgenden Auseinandersetzungen ist von einer Darstellung der mathematischen Wissenschaften in ihren Grundzügen oder ihren Einzelheiten wesentlich verschieden. Wir bringen keine mathematischen Lehrsätze und Formeln, wir wenden uns auch an den, dem die Mathematik seit seiner Schulzeit fremd geworden ist. Wir haben hier nicht die Ergebnisse der mathematischen Forschung an sich zu betrachten, sondern nur die Früchte zu suchen, welche aus dieser Forschung der Allgemeinheit ersprießen. Wir haben demnach zu verfolgen, in wieweit mathematische Kenntnisse und mathematische Denkweise Bedeutung gewinnen für das, was nach der gerade herrschenden Auffassung als Bildung gilt.

Zweierlei Bildung.

Wir haben aber zu unterscheiden zwischen der Bildung, die zur Ausübung eines bestimmten Berufes nötig ist, und der Bildung, die wir unabhängig von der Besonderheit des Berufes rein um ihrer selbst willen erstreben, durch die wir alle unsere Lebensbetätigungen verklären und vertiefen wollen. Die Römer haben für diese Läuterung und Veredlung des geistigen Lebens das Wort humanitas geprägt und als Humanismus hat sich auch die neuzeitliche Bewegung bezeichnet, die auf der Grundlage des klassischen Altertums die Schaffung eines höheren Menschentums erstrebte.

Der Scheidung der Bildung in Fachbildung und Allgemeinbildung entspricht auch die Trennung der Fachschulen und der Allgemeinschulen, beide Arten in den verschiedenen Stufen, die wir als niedere, höhere und Hochschulen kennzeichnen. Die Fachschulen dienen der Ausbildung zu einem bestimmten Berufe, ihnen geht die Erziehung einer Allgemeinschule vorauf; nach der Stufe der Fachschule richtet sich auch die Stufe der Vorbildung.

Stellung der Mathematik innerhalb der Gesamtheit des Unterrichts.

Die Mathematik spielt nun eine Rolle sowohl an den Fachschulen wie an den Allgemeinschulen. Das eine ist sehr leicht erklärlich, das andere erscheint nicht so unmittelbar verständlich. Denn mathematische Hilfskenntnisse sind für bestimmte Berufszweige unentbehrlich, und wenn vielfach auch die mathematischen Bestandteile der Ausbildung das Bestreben haben, in der eigentlichen fachlichen Belehrung aufzugehen, und wenn diese Tendenz auch wenigstens bei uns in Deutschland durch das von vielen Seiten mit großer Heftigkeit betriebene Zurückdrängen einer geordneten mathematischen Unterweisung stark gefördert wird, so bleiben die mathematischen Bestandteile

der Ausbildung doch auch in der engen Verschmelzung mit dem Fachstudium deutlich erkennbar bestehen.

Dagegen ist die Rolle, welche die Mathematik in der Allgemeinbildung spielt, nicht so leicht zu begreifen, wenn man die Schwierigkeit bedenkt, welche die Mitteilung mathematischer Kenntnisse bietet, und die Abneigung berücksichtigt, welche in den Kreisen der Gebildeten gegen die Abstraktheit und Schwerverständlichkeit des mathematischen Wissens besteht. Es könnte scheinen, daß die Mathematik nur in passender Beschränkung und Auswahl für die Berufe, die ihrer nicht entraten können, und im vollen Umfang für solche Menschen, die durch Begabung und Neigung auf sie hingewiesen werden, bestimmt sei. Dem widersprechen die Tatsachen aber durchaus. Die Mathematik nimmt in der Allgemeinbildung unserer Zeit eine hervorragende und unbestrittene Stellung ein. Diese Stellung zu erklären, wird unsere erste Aufgabe sein. Über die fachliche Verwendung der Mathematik läßt sich nicht viel sagen, ohne in mathematische Einzelheiten einzugehen und damit ein Verständnis für das ganze Lehrgebäude der Mathematik vorauszusetzen. Diese Verwendung hat wohl ein großes Interesse für die an dem fachlichen Unterrichtswesen beteiligten Personen, aber den weiteren Kreisen der Gebildeten, an die sich unsere Darstellung wendet, liegt sie viel ferner als die Rolle, welche die Mathematik in der Allgemeinbildung spielt.

Die Hauptfrage, die uns zunächst beschäftigen muß, ist die: Wie ist es möglich, von der Mathematik als einem besonderen und durchaus wesentlichen Element der allgemeinen Bildung unserer und vergangener Zeiten zu sprechen? Ist diese mathematische Bildung etwas von der mathematischen Forschung Getrenntes und neben dieser Hergehendes, oder ist sie nichts wie ein unmittelbarer Ausfluß der mathematischen Forschungsarbeit? Ist das erste der Fall, so ist es in der Tat gerechtfertigt, die mathematische Bildung neben der mathematischen Forschung besonders zu behandeln. Fällt aber mathematische Bildung und mathematische Forschung im Wesen zusammen, so würde es überflüssig, ja verkehrt sein, beides voneinander in der Darstellung zu trennen.

Es ist nicht ganz leicht, hier die richtige Antwort zu finden. Der Begriff der mathematischen Bildung als eines Teils der Allgemeinbildung ist, nachdem er in den Zeiten der Pythagoreer so einfach und natürlich schien, heute viel umstritten und keineswegs fest umrissen. Ihm wird auch von seiten der Mathematiker, weil ihnen nur die eigentliche Forschungsarbeit am Herzen liegt, meistens wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Dennoch ist es klar, daß, wenn die Mathematik einen Hauptlehrgegenstand unserer allgemeinen Schulen bildet, sie auch eine allgemeine Bedeutung und ein allgemeines Interesse besitzen muß. Besteht dieses Interesse nun einfach in einer größeren oder geringeren Anteilnahme an der mathematischen Forschungsarbeit? Man wird zunächst versucht sein, darauf unbedingt mit Ja zu antworten. Es erscheinen nämlich nur zwei Möglichkeiten. Entweder bleibt der Unterricht auf einem früheren Stadium der mathematischen Erkenntnis stehen, das der Fassungs-

Bedeutung der mathematischen Bildung für die Allgemeinheit.

kraft des Schülers gerade angepaßt ist, oder aber man sucht auch aus den neueren Untersuchungen immer noch Früchte für den Unterricht zu ernten, indem man zwar nicht alle die Gebiete behandelt, die der Forschung erschlossen worden sind, aber doch die Klärung der Auffassung und die wesentlichen Begriffe, zu denen die Forschung geführt hat, im Unterricht mitzuteilen sucht.

Diese zweite Auffassung ist unbedingt herrschend in unserem Universitätsunterricht, wo die weitgehende Spezialisierung des Studiums eine wirkliche mathematische Fachbildung möglich macht. Aber im Schulunterricht und selbst in einzelnen Universitätsvorlesungen findet man doch meist die bequemere Auffassung vertreten, daß man bei einer bestimmten Epoche der Entwicklung stehen bleiben und alles ignorieren darf, was später geleistet ist, auch die daraus folgende Umwandlung der Grundanschauungen. Ein deutliches Beispiel hierfür ist die Schulgeometrie, die zum Teil immer noch auf dem Lehrwerke des Euklid fußt. In England bilden heute noch Euklidübersetzungen gebräuchliche Lehrbücher. Aber auch unsere deutschen Lehrbücher haben erst in der jüngsten Zeit angefangen, sich von dem Euklidischen Vorbilde freizumachen. Nicht viel anders ist es mit dem arithmetischen Unterricht, wenn auch hier die Vorbilder nicht so alten Datums sind. Es ist hauptsächlich die aus dem 18. Jahrhundert stammende Anleitung zur Algebra von Leonhard Euler, die ihren Einfluß ausübt. Dieser Einfluß ist indessen darum bedenklich, weil Euler zwar ein großer Mathematiker gewesen ist, aber über die Grundbegriffe der Mathematik Anschauungen gehabt hat, die wohl seiner Zeit gemäß, jedoch gegenwärtig längst überwunden sind. Dazu gehört z. B., daß die Teilung der Zahlen mit der Teilung eines materiellen Quantums verwechselt wird, kurz gesagt, die metrische Auffassung der Zahlen. Auch die ganze Hierarchie der arithmetischen Operationen, wie sie von der Addition anfangend der Reihe nach aufeinander aufgebaut und auseinander hergeleitet werden, geht wesentlich auf Euler zurück. So scheint tatsächlich der mathematische Schulunterricht ein früheres Stadium der mathematischen Forschung widerzuspiegeln.

Verhältnis des mathematischen Unterrichts zur mathematischen Forschung.

Es ist aber ein Irrtum zu glauben, daß die letzten und wichtigsten Ergebnisse der mathematischen Forschung nicht doch jedem Unterrichte zugute kommen können. Denn sie liegen nicht in den langwierigen und nur nach gründlicher Schulung verständlichen Entwicklungen, zu denen die immer weitergehende Anhäufung des Forschungsmaterials führt, sondern in der Ausbildung der Grundanschauungen, die schließlich aus der ganzen Forschungsarbeit als etwas an sich höchst Einfaches hervorgehen. Wenn man die Brüche nicht als Stücke eines Ganzen, wie sie durch mechanische Teilung hervorgehen, auffaßt, sondern als Zahlenpaare, die analogen Rechenregeln unterworfen werden wie die einfachen Zahlen, so klingt das gewiß sehr schlicht und klar, und doch war eine weitgehende Entwicklung der arithmetischen Wissenschaft notwendig, um eine solche Auffassung zu begründen.

Freilich wird man unter Umständen sehr schwere Bedenken dagegen haben, die definitive wissenschaftliche Auffassung auch in den Elementar-

unterricht zu übertragen. Man wird eine andere, an sich unvollkommenere Auffassung häufig als die pädagogisch wertvollere bevorzugen, man wird dem Schüler nicht gleich die volle Abklärung der Begriffe mitteilen, sondern wird sie sich erst allmählich in dem Geiste des Schülers selbst ausbilden lassen. Manches, woran die mathematische Forschung gleichgültig vorübergeht, ist von großer Bedeutung für den Unterricht; wir brauchen nur an die psychologische Seite zu denken. Damit aber kommen wir zu einer Ansicht, die den mathematischen Unterricht nicht einfach als Ausfluß des gegenwärtigen Zustandes der mathematischen Forschung erscheinen läßt, sondern ihm seine besonderen Regeln und Gesetze zuschreibt. Er wird dadurch etwas, was neben der mathematischen Forschung hergeht und neben ihr ein gesondertes Dasein führt, und deshalb ist auch die Darstellung des mathematischen Unterrichtes etwas, was zu der Darstellung der mathematischen Forschung ergänzend hinzutreten muß.

Zweckbestimmung im mathematischen Unterricht.

Es ist nun offenbar, daß der Gebrauch, den man von der Mathematik machen will, die Art ihrer Behandlung von Grund aus bestimmen muß und darum die Mathematik, wo sie, wie in der fachlichen Ausbildung, ihrer praktischen Verwendung halber getrieben wird, ganz anders zu unterrichten ist, als wo sie als Bestandteil der allgemeinen Bildung auftritt. Bei der praktischen Aufgabe handelt es sich allein darum, aus dem, was als gegeben vorliegt, das, was gesucht ist, mit hinreichender Genauigkeit und in gebrauchsfertiger Form abzuleiten. Auf je einfachere und bequemere Weise dies gelingt, um so besser ist die Lösung der Aufgabe. Die Freude an der mathematischen Entwicklung selbst muß ganz zurücktreten gegenüber dem Bestreben, die aufzuwendende rechnerische oder zeichnerische Arbeit auf ein Mindestmaß zu beschränken. Dementsprechend braucht auch der künftige Praktiker nicht zu lernen, was nie für ihn von Bedeutung sein kann. Wollte man ihn auf die verschlungenen Pfade der Spekulation führen, so würde er sich auf ihnen nur verirren und von seinem Ziele abkommen. Anders liegt der Fall, wo nicht der Gedanke einer beruflichen Verwertung des Gelernten die Führung hat Hier wird die praktische Ausführung verhältnismäßig gleichgültig, wenn auch ein gewisses Eingehen auf sie durch die Förderung des praktischen Sinnes, die überall zu erstreben ist, geboten wird. Dagegen gewinnt die prinzipielle Erkenntnis eine entscheidende Bedeutung. Die Schüler unserer allgemeinen Schulen sollen nicht lernen, Brücken zu berechnen, Maschinen zu konstruieren und Straßenzüge abzustecken, sie sollen höchstens einen Begriff davon bekommen, auf welchen wissenschaftlichen Grundlagen dies geschieht, dafür aber soll ihnen die allgemeine Bedeutung der mathematischen Begriffe und Gesetze in einer ihrem Fassungsvermögen und ihrer Gesamtbildung angepaßten Weise klargemacht werden.

So einfach und einleuchtend das alles klingt, so ungeheuer schwer ist es doch im einzelnen durchzuführen. Viel leichter und einfacher ist es, den mathematischen Schulunterricht so zu handhaben, daß er eine zweckmäßige Vorbereitung für diejenigen Schüler bildet, die später die Mathematik für ihren

Lebensberuf gebrauchen. So wird er auch noch vielfach betrieben. Wir stehen eben, was das mathematische Bildungswesen betrifft, erst am Anfang einer neuen Entwicklung. Die Grundlage dieser Entwicklung muß aber die Erkenntnis sein, daß dem mathematischen Unterricht nicht eine bestimmte Bahn vorgezeichnet ist, die er notwendigerweise gehen muß und die für alle Schulgattungen dieselbe ist. Was der Schüler einer höheren Lehranstalt aus dem mathematischen Unterricht mit ins Leben hinausnimmt, sollen nicht wie beim Schüler einer Fachschule bestimmte Kenntnisse sein, die ihn befähigen, die Aufgaben seines Berufes gehörig zu beherrschen, indem er, wo sie einer mathematischen Lösung bedürfen, diese Lösung zu finden lernt, es ist vielmehr eine bestimmte Art, die Wirklichkeit aufzufassen. Mathematische Rechnungen wird das Leben selten verlangen, wohl aber eine Fähigkeit des mathematischen Denkens. Die Ausbreitung der mathematischen Auffassungsweise ist für uns daher fast wichtiger als die Ausbreitung der einzelnen mathematischen Kenntnisse. Die mathematische Auffassungsweise bedeutet die Ausübung einer analysierenden Tätigkeit des Verstandes, an der die vollständige Aufnahme eines gegebenen empirischen Materials, seine lückenlose logische Verbindung und die absolute Sachlichkeit, die Unabhängigkeit von allen persönlichen Meinungen und Empfindungen die entscheidenden Merkmale sind. Es ist die Quintessenz des „bien raisonner“, das Friedrich der Große im Sinne der Aufklärung als Grundlage der ganzen Erziehung hingestellt wissen wollte.

Ausbreitung des mathematischen Denkens.

Die Ausbreitung des mathematischen Denkens ist aber keineswegs auf den Unterricht in der Schule beschränkt, sie wird ebensogut auch auf dem Wege der literarischen Veröffentlichung erreicht. Ja lange Zeit ist diese Art der Mitteilung der Hauptweg gewesen, auf den die Verbreitung der mathematischen Wissenschaft angewiesen war, und wenn heute auch niemand mehr, der nicht eine besondere Vorliebe für Mathematik hat, ohne eine bestimmte Veranlassung nach einem Buche greift, das irgendwie nach Mathematik schmeckt, so dringen immer noch durch gemeinverständliche astronomische und physikalische Schriften die Früchte des mathematischen Denkens in weite Kreise, und für die Philosophie spielt das Wesen der mathematischen Erkenntnis fortgesetzt eine große Rolle. Daß nicht auch der Mathematik an sich ein gewisses Interesse entgegengebracht wird, hat zum Teil vielleicht gerade den Grund, daß sie in den Schulen allzu gründlich und ausführlich behandelt wird. In englischen Zeitschriften finden sich fortwährend Rätselaufgaben mathematischen Charakters und erfreuen sich einer großen Beliebtheit. Es ist merkwürdig, daß wir Deutschen später im Leben gerade die Dinge meiden, die auf der Schule am meisten getrieben worden sind. Wenn aber das das Resultat des mathematischen Unterrichts ist, so ist es kein gutes Zeichen für ihn.

Die didaktische Mathematik.

Die eigentümlichen Schwierigkeiten, denen die Schaffung eines vernünftigen und zeitgemäßen mathematischen Unterrichts begegnet, liegen wesentlich darin begründet, daß uns eine eigentliche didaktische Mathematik heute noch fehlt. Darunter dürfen wir nicht die aufgehäuften Materialien früherer

Forschungsepochen verstehen, sondern eine die modernen Errungenschaften voll verwertende, frei und unabhängig schaffende Wissenschaft, deren Aufgabe die Nutzbarmachung der Mathematik für die Allgemeinbildung ist. Diese Aufgabe ist ebenso schwierig und wichtig wie die Fortleitung der mathematischen Erkenntnis auf immer neue Bahnen und Gebiete. Es haben aber bis jetzt im allgemeinen alle die, die an der mathematischen Forschung tätigen Anteil nahmen, wenig Neigung gezeigt, ihre Arbeiten durch die Zwecke des Unterrichtes bestimmen zu lassen, trotzdem ihre berufliche Stellung meist auf diesen Zwecken aufgebaut ist. Anderseits erstarren die, welche an dem Unterricht unmittelbar beteiligt sind, leicht in bestimmten Schulmeinungen, sie finden nicht die Zeit und Gelegenheit, mit der rasch fortschreitenden Wissenschaft in Fühlung zu bleiben und sich so die gehörige Tiefe der Auffassung und Weite des Überblicks zu erhalten. Wohl sehen wir die Pädagogik als eine allgemeine Wissenschaft an, aber die Mathematik hat in ihr nur eine kümmerliche Stellung gefunden. Die Einsicht, daß der Bereich aller Lehrgegenstände nicht von einem Menschen umspannt werden kann und daß deshalb auch innerhalb der Pädagogik eine Differenzierung der Betätigung eintreten muß, beginnt sich erst langsam durchzusetzen.

So stehen wir vor einer großen Aufgabe, die aber einstweilen der Zukunft angehört: der wirklichen Durcharbeitung der Mathematik in ihrer erzieherischen Bedeutung, welche die Klärung der Methoden und die Beschaffung des Unterrichtsmaterials in der richtigen Anpassung an den besonderen Zweck zu leisten haben wird. Aber es kann nicht unsere Aufgabe sein, die Zukunft vorahnend zu bestimmen. Wenn wir jedoch bloß auf die Gegenwart sehen, so entgeht uns, unter welchen verschiedenen Gesichtspunkten die mathematische Bildung überhaupt auftreten kann, welche wechselnde Bedeutung sie je nach der Kultur hat, in die sie sich einfügt, wir erfassen nicht alle Licht- und Schattenseiten, die ihr anhaften. Daher ist es besser, die ganze Entwicklung des mathematischen Bildungswesens, soweit es nach den uns erhaltenen Quellen und in einer kurzen Darstellung möglich ist, an unserem Geist vorüberziehen zu lassen.

Historischer Charakter der folgenden Betrachtung.

Es ist ja klar, daß, wenn die Mathematik eine erzieherische und bildende Bedeutung, wie wir sie ihr zuschreiben, wirklich besitzt, diese Bedeutung sich im Laufe der Zeiten offenbart haben muß. Die Vergangenheit liefert so nicht bloß den Schlüssel zum Verständnis der gegenwärtigen Zustände, sondern sie klärt auch den Blick für die Erkenntnis der wahren Aufgaben des mathematischen Unterrichtswesens und seiner Stellung in der Gesamtheit der Bildung.

Wir müssen bedenken, daß unser Bildungswesen nicht willkürlich geschaffen ist, sondern sich ebenso wie die politischen und sozialen Verhältnisse der einzelnen Völker im Laufe der Zeiten mit innerer Notwendigkeit entwickelt hat. Wandlungen in dem Bildungswesen und in dem Bildungsideal sind immer Hand in Hand gegangen mit tiefgreifenden Veränderungen in den äußeren Verhältnissen der Staaten. In dem Bildungswesen spiegelt sich der Gang der Weltgeschichte deutlich wider. Die einmal erworbene

Auffassung des Bildungsideals hält sich mit großer Zähigkeit, aber um so charakteristischer sind die Umwandlungen, denen es nach Ort und Zeit unterworfen ist. So steht das christliche Mittelalter auf dem Boden des Altertums, aber der Schwerpunkt des Interesses ist verschoben. Das christliche Glaubensbekenntnis bildet den Brennpunkt alles geistigen Lebens, während die griechische Bildung, die das Altertum beherrscht, von einer freien Ausgestaltung des alten Götterglaubens ausgehend sich erst allmählich von der Naturbetrachtung den sittlichen Problemen und von diesen wieder einer übernatürlichen Ordnung der Dinge zuwandte.

Die geistige Bildung ist dauernder wie die Staaten, die aufleben und absterben. Sie wird von der untergehenden der aufblühenden Nation übergeben, wie ein Besitztum sich vom Vater auf den Sohn vererbt. Von einem Volke, das längst vergangen ist, hält sich sein geistiges Wesen frisch und lebendig, nicht bloß in seinen Schriften und Denkmälern, sondern auch in einer fortlaufenden Überlieferung, die beständiger ist, als wir gewöhnlich denken. Diese Überlieferung wird nur gelegentlich durchbrochen von einem unmittelbaren Zurückgreifen auf die erhaltenen Monumente. Eine solche Renaissance hat zweimal das Bildungswesen ergriffen, einmal am Ausgang des Mittelalters, und das zweitemal gegen Ende des 18. Jahrhunderts. Beidemal war es das klassische Altertum, im besonderen das bewunderte Vorbild der Griechen, das der Umwandlung die Richtung gab. Aber die Griechen selbst waren ihrerseits wieder von außen her beeinflußt, namentlich von den Ägyptern und den asiatischen Völkerschaften.

So werden wir weit zurück ins Altertum verwiesen, wenn wir die Quellen unserer Bildung und aus ihnen das rechte Verständnis für sie suchen. Aber der Bereich, den wir zu fassen haben, braucht nicht fortwährend die ganze Erde zu umspannen. Es hebt sich vielmehr ziemlich klar und deutlich ein Weg heraus, der von einem Volk zum andern führt und den wir da, wo er sich verbreitert und teilt, immer so verfolgen, daß er in den gegenwärtigen Zustand des Bildungswesens unseres Vaterlandes ausmündet.

I. Die mathematische Bildung der Ägypter.

Die Anfänge der Mathematik bei den Ägyptern.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß mathematische Kenntnisse sich zuerst in Ägypten finden, und ebensowenig, daß sie praktischen Bedürfnissen ihren Ursprung verdanken. Nach Eudemus sind es die durch die Nilüberschwemmungen immer wieder aufs neue notwendig werdenden Abgrenzungen der Felder gewesen, welche die Kunst der Geometrie entwickelt haben. Dem entspricht auch das griechische Wort „Geometrie", das ja nichts anderes wie Feldmessung bedeutet. Es ist aber sicher nicht allein die Feldmessung gewesen, die auf die Geometrie führte, auch die großen Steinbauten der Ägypter, die schon zu Beginn des vierten Jahrtausends v. Chr. einsetzen, bedingen notwendig ein gewisses Maß von geometrischen Kenntnissen. Es hat sich schon sehr früh ein besonderer Beruf der Baumeister und Steinmetzen entwickelt, für den die geometrische Abstraktion der regelmäßig gestalteten Raumformen die

Grundlage bildet. Damit steht in Zusammenhang eine gewisse Vorliebe für eine möglichst große geometrische Regelmäßigkeit, die sich in der Ausbildung der alten Mastaba zur Pyramide deutlich offenbart. In der Herstellung der regelmäßigen geometrischen Gestalt im gigantischsten Maßstabe drückt sich das aus, was man unter den erworbenen Kenntnissen vielleicht für das Wichtigste hielt, die Fähigkeit, einem Bauwerk eine ganz bestimmte Neigung seiner Seitenflächen und Orientierung gegen den Horizont zu geben. Eine ebene Wandfläche so herzustellen, daß sie nicht vertikal, sondern in bestimmter Weise geneigt ist, bedeutet technisch nicht eine so ganz einfache Leistung, wie man wohl annehmen möchte. Die durch das Senklot bestimmte vertikale Wand ist viel leichter herzustellen. Die ägyptischen Baumeister haben die erworbene Kunst mit Stolz gezeigt, indem sie auch Tempeln und Königshäusern solche geneigte Wandflächen gaben. Das dazu benutzte Instrument besteht im wesentlichen aus einem rechtwinkligen Dreieck, von dem eine Kathete vertikal, die andere horizontal und senkrecht zu dem unteren Rand der Mauer gestellt wird. Diese horizontale Kathete nannten die Ägypter *Piremus*, „das Hinausgehen in die Breite", woher anscheinend das Wort Pyramide stammt. Die stehende Kathete hieß *Uchatebet*, „das Suchen der Fußsohle". Das Verhältnis der horizontalen zur vertikalen Kathete hieß *Seqt*. Das rechtwinklige Dreieck, das so neben der rechteckigen Form der Felder, des Grundrisses der Gebäude nun als Grundfigur auftritt und sich ja auch unmittelbar als Hälfte des Rechtecks ergibt, wurde aber erst dadurch einer weitgehenden praktischen Verwendung fähig, daß es mit dem Begriff der ähnlichen Veränderung einer Figur verquickt wurde, den die Ägypter voll ausgebildet hatten. So benutzen sie schon zur Übertragung einer Zeichnung in verändertem Maßstab ein quadratisches Netz, ein Verfahren, das viele Jahrtausende später ein Gelehrter und Künstler der italienischen Frührenaissance, Leo Battista Alberti, wie etwas Neues mitteilte.

Die Festlegung des rechten Winkels ist auch bei dem einfachsten Bau eine der ersten und wichtigsten Aufgaben. Sie geschieht gewöhnlich mit dem Winkelhaken, den auch die Ägypter schon gekannt haben. Es gibt aber noch ein sehr bequemes Verfahren, durch welches die Festlegung des rechten Winkels auf eine Längenmessung zurückgeführt wird und welches darin besteht, daß man eine Schnur, in die in gleichen Abständen Knoten geknüpft sind, in passender Weise um drei Pflöcke legt. Es beruht auf der einfachen Tatsache, daß ein Dreieck, dessen Seitenlängen sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten, ein rechtwinkliges ist. Dieses Verfahren ist von den Ägyptern gefunden worden und sie gaben ihm nicht mit Unrecht eine große Bedeutung. Vielleicht davon ausgehend suchten die ägyptischen Feldmesser überhaupt alle Messungen im Felde auf Längenmessung zurückzuführen. Sie wurden deshalb von den Griechen auch Seilspanner, Harpedonapten, genannt. Das gespannte Seil wurde aber nicht bloß zur Bestimmung der Entfernungen, sondern auch zur Festlegung der Richtungen benutzt. Es wurde so gespannt, daß es nach dem Punkte, der die Richtung bestimmte, hinwies, und dann

Die Harpedonapten.

wurden unter ihm zwei Pflöcke in die Erde eingeschlagen. Die Vorgänge bei der Anlegung des Grundrisses eines Gebäudes waren in Ägypten nicht viel anders, wie wir sie heute bei jedem Bau beobachten können. Das ist kein bloßer Zufall, sondern liegt an der Zähigkeit der handwerksmäßigen Überlieferung, die von den Ägyptern bis zu uns herüberreicht. Ägyptische Baumeister, Steinmetzen und Feldmesser spielten im ganzen Altertum eine große Rolle. Als Augustus eine Vermessung des Landes ausführen ließ, zog er ägyptische Feldmesser heran.

Praktische Mathematik.

Von der logischen Schlußfolgerung, die das Wesen der wissenschaftlichen Geometrie ausmacht, kann bei ihren ersten Anfängen keine Rede sein. Die praktische Bedeutung war das Entscheidende. Zwischen Näherungswert und exakter Berechnung wurde kein Unterschied gemacht. Die Ägypter besaßen zum Teil sehr brauchbare Näherungsformeln, z. B. für die Ausmessung des Kreises, es finden sich aber auch direkt falsche Formeln, deren sie sich bedient haben. So benutzten sie zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Vierecks das Produkt aus den arithmetischen Mittelwerten der Paare gegenüberliegender Seiten. Dies Verfahren ist nur zu verstehen als eine Näherungsrechnung für Vierecke, die zwar nicht genau, aber doch ungefähr rechteckig sind. Es ist aber noch im Jahre 237 v. Chr. in der Schenkungsurkunde des Tempels von Edfu angewendet worden, ebenso wie die Formel, die den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks als Produkt der Schenkellänge mit der halben Länge der Basis liefert. Das geschah in demselben Lande, in dem schon über ein halbes Jahrhundert vorher Euklid seine Elemente geschrieben hatte. So wenig Einfluß hatte die griechische Geometrie auf die praktische Mathematik der Ägypter erlangen können. Das Festhalten am Althergebrachten, das als heilig und unverletzlich galt, übertrug sich sogar durch das Ansehen der ägyptischen Geometer auf die römische Kulturwelt und von da auf das christliche Mittelalter, in dem sich immer noch dieselben falschen Inhaltsformeln und dieselbe Verständnislosigkeit für den Unterschied zwischen praktischer Brauchbarkeit und theoretischer Richtigkeit finden. Dabei war in Ägypten selbst die Entwicklung, ausgehend von dem Gedanken der Harpedonapten, den Inhalt einer Figur allein durch Längenmessungen zu bestimmen, längst zur richtigen Formel fortgeschritten. Die Lösung liegt bekanntlich in der sogenannten Heronischen Dreiecksformel, welche den Inhalt des Dreiecks aus den Seitenlängen zu finden lehrt. Sie bedingt die Erkenntnis, daß der Flächeninhalt des Vierecks überhaupt nicht aus den Seiten allein zu finden ist, daß man es vielmehr zuerst durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen und für diese dann die Aufgabe lösen muß, wobei man allerdings zu einer ziemlich verwickelten Berechnungsart gelangt. Daß die Kunst des Messens auf der Erde und am Himmel im späteren Altertum gerade in Ägypten sich zu einer hohen Blüte entwickelt, liegt sicher zum Teil an alteingewurzelten Fähigkeiten und Neigungen.

Leider rinnen die Quellen für die Kenntnis der alten ägyptischen Mathematik nicht sehr reichlich. Die Hauptquelle bildet der von Eisenlohr ent-

zifferte Papyrus Rhind. Nach Révillouts Ansicht ist er das Heft eines ägyptischen Schülers, das nach einem wohl als Lehrbuch benutzten Muster aus dem Jahre 2200 v. Chr. angefertigt und dann von einem Schreiber Ahmes abgeschrieben ist. Das Muster selbst ist vielleicht in Papyris zu sehen, die in Kahûn im Jahre 1889 gefunden wurden. Im allgemeinen scheint sich die Lösung der Aufgaben mehr durch die persönliche Unterweisung als durch schriftliche Überlieferung fortgepflanzt zu haben. Wenn deshalb die schriftlichen Zeugnisse mangeln, so sprechen doch die Bauten selbst und die uns erhaltenen Architekturzeichnungen eine deutliche, nicht mißzuverstehende Sprache. Das meiste, was für die Architektur, auch der heutigen Zeit, an geometrischen Kenntnissen und Vorstellungen notwendig ist, muß sich der Hauptsache nach schon sehr früh bei den Ägyptern entwickelt haben. Es ist dies eine praktische Mathematik, die ihre Eigenart, die Übermittelung durch die persönliche Unterweisung, die ausschließliche Betonung des praktischen Zweckes und die Begründung auf der anschaulichen Erfassung der Wirklichkeit bis in die Gegenwart bewahrt hat, die aber heute allerdings kaum mehr als Mathematik empfunden wird.

Aufkeimen des theoretischen Interesses.

Es wirkten jedoch eine Reihe eigentümlicher Umstände dahin, neben dem praktischen Interesse auch die theoretische Forschung schon bei den Ägyptern aufkommen zu lassen. Diese Umstände liegen zunächst darin begründet, daß die praktischen Aufgaben, welche die Geometrie zu erfüllen hatte, mit dem geistigen und sittlichen Leben des Menschen in enger Beziehung standen. Die Abteilung der Felder war nicht bloß eine technische Aufgabe, sie stand in Verbindung mit Sitte und Recht; jedem so viel zu geben, wie ihm zukam, das war ja wesentlich der Zweck. Ebenso waren die Steinbauten, welche die Ägypter aufrichteten, nicht Wohnungen für lebende Menschen; seine Wohnung baute sich in dem glücklichen Lande, wo keine Unbilden der Witterung zu befürchten waren, jeder nur für seine Lebenszeit, wie es ihm gefiel, aus Holz, Nilschlamm und Schilf leicht auf. Die Steinbauten dagegen waren Wohnungen für die Götter und für die Toten, sie wurden nicht für eine kurze Zeitspanne, sondern für die Ewigkeit errichtet. Damit entstand aber nicht bloß eine enge Verbindung aller der Kenntnisse, die für diese technische Aufgabe nötig waren, mit dem Gottesdienst und mit der Priesterkaste, sondern es mußte sich auch offenbaren, daß ebenso unvergänglich wie die aufgerichteten Bauten die Gesetze waren, auf denen ihre Gestaltung beruhte. Der Papyrus Rhind beginnt mit den Worten: „Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge, aller Geheimnisse, welche sind in den Dingen."

So mußte von Anfang an die mathematische Betrachtung in Beziehung treten mit dem Gedanken des Ewigen, Unvergänglichen; das Bewußtsein dieser Beziehung prägt sich später in der ganzen griechischen Bildung aufs deutlichste aus und überträgt sich auch in die christliche Gedankenwelt hinein.

Vielleicht steht es in Zusammenhang mit dieser symbolischen Bedeutung der Mathematik, wenn sie in den ägyptischen Priester- und Beamtenschulen als Bestandteil der Bildung aufgenommen wird, vielleicht geben dazu aber auch

praktische Gesichtspunkte Veranlassung: die Anteilnahme an den Bauten, der Feldermessung, der Abgabenverteilung, der Regelung von Vermögensansprüchen usw. Die Grenze zwischen praktisch und theoretisch ist dabei schwer zu ziehen. Wohin sollen wir es rechnen, wenn für die Abmessungen eines Tempels die Zahlenverhältnisse nach bestimmten für heilig und wunderwirkend gehaltenen Regeln bestimmt werden, wie es nicht bloß bei den Ägyptern, sondern auch bei den in der Kultur von ihnen nicht unabhängigen Babyloniern und Indern der Fall gewesen ist? Der Gedanke, bestimmten Zahlen eine besondere Bedeutung zuzuschreiben, rührt vielleicht her von der Beobachtung der Regelmäßigkeit in dem Lauf der Gestirne. Die wichtigsten astronomischen Perioden sind den Ägyptern schon sehr früh bekannt gewesen. Damit mußte aber die Vorstellung einer zahlmäßigen Ordnung des Weltalls und die Idee, daß die Zahlen geheimnisvolle, wunderbare Eigenschaften und Kräfte haben, auftauchen.

Idee der allgemeinen Bildung.

Es liegt in der Mathematik von Anfang an ein theologisches oder metaphysisches Element, das sie nie verleugnet hat. In ihr offenbart sich die ideale Geistesrichtung, die den höchsten Problemen zustrebt. Diese Geistesrichtung hat aber auch das Eigentümliche, daß sie in der Erziehung nicht mehr den praktischen Zweck der Vorbildung für bestimmte berufliche Aufgaben, sondern eine allgemeine Bildung des Geistes voranstellt. Schon bei den Ägyptern ist die Mathematik dazu verwendet worden, den Geist zu stärken. Schon bei ihnen finden sich viele von den Aufgaben, durch deren Lösung nur die Denkfähigkeit entwickelt werden soll, ohne daß sie für irgend einen praktischen Zweck Bedeutung haben. Diese Aufgaben entnehmen der Wirklichkeit nur ihre Bilder, bringen diese aber in eine Verbindung, die der Wirklichkeit oft geradezu Hohn spricht. Hierzu gehören die bekannten Aufgaben, an denen die Ägypter die Begriffe der arithmetischen und geometrischen Reihe entwickelt haben, wie wenn 100 Brote an 5 Personen nach einer arithmetischen Progression verteilt werden sollen, oder wenn die bekannte Zählung gegeben wird: 7 Personen haben je 7 Katzen, jede Katze frißt 7 Mäuse, jede Maus hätte 7 Ähren Gerste gefressen, jede Ähre bringt 7 Maß Getreide, und die Frage lautet, wieviel Getreide durch die Katzen der 7 Personen gerettet wird. Die Nachwirkung hiervon können wir noch in unserem arithmetischen Unterricht spüren. Ebenso erinnert auffallend an unseren Schulunterricht die ägyptische Hau-Rechnung, die nichts anderes bedeutet wie die Auflösung linearer Gleichungen mit einer Unbekannten. Vielleicht führt auch hier ein Weg direkt von den Ägyptern über die Araber zu unseren Schulen. Andere Aufgaben erinnern lebhaft an die Diophantische Arithmetik, so daß auch dieser Zweig der Mathematik, der ja die Quelle der modernen Zahlentheorie geworden ist, auf die Ägypter zurückgeht. Die Ägypter haben eine verwickelte Rechenpraxis ausgebildet, die uns in dem Buche des Ahmes deutlich überliefert ist und die zu beherrschen Mühe und Fleiß genug gekostet haben muß; die Auflösung der Brüche in Stammbrüche, die den Kern der ägyptischen Bruchrechnung bildet, wäre auch für die Schüler unserer Schulen keine leichte Aufgabe.

Erzieherische Verwendung der Mathematik bei den Ägyptern

Typisch an der ägyptischen Mathematik ist, daß sie, soweit sie nicht unmittelbar praktische Ziele hat, zu Erziehungszwecken gebildet ist. Aufgaben der Praxis werden so vereinfacht und umgestaltet, daß sie als Übungsaufgaben im Unterricht verwendet werden können. Dies ist z. B. auch bei der Flächenmessung der Fall. Aus ihr werden Fälle gebildet, wo der Zusammenhang der Flächengrößen möglichst auffallend und einfach ist, ohne weiter Rücksicht darauf zu nehmen, ob diese Fälle in der Praxis wirklich vorkommen werden. Dahin gehört der berühmte Fall des pythagoreischen Lehrsatzes, durch den die Fläche eines Quadrats auf zwei Quadrate verteilt wird. Dieser Satz scheint in der Tat den Ägyptern schon früh bekannt gewesen zu sein. Die uns erhaltenen Aufgaben betreffen allerdings alle den besonderen Fall, wo die Längen der Seiten in dem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis 3:4:5 haben, aber es ist schwer einzusehen, wie man bei diesen Dreiecken allein gerade auf die Beziehung des pythagoreischen Lehrsatzes $3^2 + 4^2 = 5^2$ gekommen sein sollte. Der besondere Fall scheint vielmehr nur darum gewählt zu sein, weil sich hier die Beziehung in ganzen Zahlen geben läßt.

Andere Aufgaben haben auch im Unterricht ihren praktischen Charakter bewahrt. Dahin gehört die angenäherte Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln, sowie die Ausmessung des Kreises, welche die Ägypter auf rein empirischem Wege gefunden zu haben scheinen. Der praktische Zweck leuchtete bei den ägyptischen Priester- und Beamtenschulen (Asbo), deren Charakter dem unserer Universitäten auffallend ähnlich gewesen zu sein scheint, immer noch durch. Die Erziehung hatte auch wohl unmittelbar praktische Ziele. Bei den Beamten ist das unmittelbar einleuchtend, sie wurden eben zur Leitung praktischer Arbeiten herangebildet. Aber auch die Priester scheinen mit der praktischen Tätigkeit in enger Fühlung gestanden zu haben; wir finden das ja auch im Mittelalter wieder, wo die Geistlichen als Baumeister, Feldmesser usw. tätig sind. Jedenfalls hat den Priestern die Zeitrechnung und die Anfertigung des Kalenders obgelegen. Aber auch bei den Bauten der Tempel und der Abteilung der Felder werden sie eine Rolle gespielt haben.

Auffallend ist bei den Ägyptern die hohe Wertung der praktischen Tätigkeit, die ganz im Gegensatz zu dem griechischen Bildungswesen steht. Hier geht keine Tradition von dem ägyptischen Schulwesen zu uns herüber. Unter dem Einfluß der griechischen Bildung haben wir vielmehr gelernt, als höherstehend eine Erziehung anzusehen, die keinen praktischen Zweck verfolgt, und haben dagegen der fachlichen Ausbildung den Stempel der Minderwertigkeit aufgedrückt. Bei den Ägyptern aber ist die praktische Tätigkeit etwas Großes, ja Heiliges. Beim Tempel von Denderah ist dargestellt, wie der König selbst mit Hilfe der Göttin der Wissenschaft Safchet den Tempel nach dem Eintritt der Plejaden in den Meridian orientiert. In der Inschrift sagt der König: „Ich fasse die Holzpflöcke und den Stiel des Schlegels, die Göttin Safchet hält mit mir das Seil.“ Der Winkelhaken kommt häufig auf Bildern in der Hand des Königs vor, um die Wichtigkeit der technischen Tätigkeit für das ganze Leben zu zeigen.

II. Die mathematische Bildung der Griechen.

Anfänge der griechischen Mathematik.

Die geometrischen Kenntnisse der Ägypter nahmen die Griechen auf, als ihre Entwicklung so weit fortgeschritten war, daß sie diese Kenntnisse verstehen und verwerten konnten. Auf welche Weise sie zu ihnen gelangt sind, ist quellenmäßig nicht festzustellen. Wenn wir aber bedenken, wie eng sie mit den praktischen Aufgaben zusammenhängen, so müssen wir annehmen, daß wenigstens ein Teil davon schon in vorhellenischer Zeit mit der ägyptischen Kultur auf das griechische Gebiet herübergewandert ist. Viel haben sicher die ägyptischen Baumeister und Feldmesser mitgebracht. Wahrscheinlich sind nicht bloß ägyptische Einflüsse, sondern es ist auch eine Einwirkung von Babylon her festzustellen. Ob diese Einwirkung eine direkte war, oder etwa durch die Phöniker und die kleinasiatischen Völker vermittelt wurde, ist nicht zu sagen. Wir müssen bedenken, daß in der Zeit, aus der uns über griechische Geometrie etwas berichtet wird, der Handel längst seine Fäden zwischen allen Völkern gesponnen hatte und die Kenntnisse und Anschauungen eines Volkes leicht zu einem andern gelangen konnten. Reisen in fremde Länder aus geschäftlichen Gründen und zu Bildungszwecken waren sehr häufig. Griechische Handelsniederlassungen bestanden im ganzen Bereich des Mittelmeers, auch in Ägypten.

Thales.

Der erste unter den Griechen, von dem bestimmt berichtet wird, daß er sich mit Geometrie beschäftigt habe, ist Thales (um 620 v. Chr.) aus Milet. Mag die Überlieferung im einzelnen auch unzuverlässig sein, denn Thales galt bei den Griechen als der Repräsentant des Gelehrten überhaupt, dem schon in früherer Zeit eine Menge von Weisheitssprüchen und anekdotischen Zügen zugesprochen wurde, immerhin ist es äußerst charakteristisch, welche Art von geometrischen Sätzen auf ihn zurückgeführt werden. Es sind wiederum durchaus praktische Aufgaben, von denen er ausgegangen sein soll, die Bestimmung von Höhen und Entfernungen. Er soll das begründet haben, was wir heute als terrestrische Nautik bezeichnen, indem er lehrte, wie die Schiffer ihren Ort und ihren Weg durch Messung von Winkeln bestimmen können. Das, was an theoretischer Spekulation auf Thales zurückgeführt wird, ist äußerst einfacher Natur, es geht wesentlich von der Figur des Rechtecks mit seinen Diagonalen und dem umschriebenen Kreis aus. Ein zwingender Grund dafür, daß er unmittelbare Kenntnis von der ägyptischen Geometrie gehabt habe und selbst in Ägypten gewesen sei, scheint nicht vorzuliegen. Das, was er wußte, konnte schon längst Gemeingut geworden sein. Vielleicht ist daher schon an diesem Anfangsstadium der griechischen Mathematik trotz aller praktischen Färbung die Wendung zum Theoretisieren doch das Entscheidende. Ein Mann übernimmt die Geometrie, der keinen praktischen Lebensberuf verfolgt, dessen Geschäft vielmehr das Nachdenken über das Wesen der Dinge ist. Es ist sicher kein Zufall, daß der Begründer der griechischen Mathematik gleichzeitig die griechische Philosophie einleitet, es liegt ja nahe, daß aus dem philosophischen Forschungsdrang heraus sein Blick sich über die

praktischen Aufgaben hinaus auf die theoretische Seite der Geometrie hinlenkte, indem er erkannte, daß sich hier Sätze finden, denen die Besonderheit der Erkennbarkeit aus dem bloßen Denken heraus und der unbedingten Gewißheit eignet.

Dieser Gesichtspunkt tritt ganz entschieden und deutlich bei dem Manne zutage, der der eigentliche Begründer der Mathematik als einer systematischen Wissenschaft gewesen sein soll, nämlich bei Pythagoras. Man hat früher von Pythagoras auf Grund der neupythagoreischen Berichte mit Bestimmtheit angenommen, daß er weite Reisen nach Ägypten und Babylon gemacht habe. Wenn nun diese Annahme auch nicht gerade dadurch widerlegt wird, daß Herodot, der zusammenstellt, was er über die Beziehung der Griechen zu den orientalischen Völkern weiß, von einer Reise des Pythagoras nichts erzählt, so liegt doch auch keine zwingende Notwendigkeit vor, eine solche Studienfahrt anzunehmen. Was Pythagoras an Wissen besaß, konnte er in seiner samischen Heimat erworben haben, so auch die geometrischen und arithmetischen Kenntnisse, die wir ihm zuschreiben. An diesen Kenntnissen hatte bereits, wie wir ja an Thales sehen, nicht bloß der Fachmann, sondern auch der der Handwerkstätigkeit entrückte Gebildete ein Interesse zu nehmen begonnen. So wird die auch in Ägypten gepflegte Zahlensymbolik der Babylonier damals unter den kleinasiatischen Griechen längst bekannt geworden sein. Sie bildete aber gerade den Hauptpunkt, wo das fachliche Interesse zum erstenmal gänzlich verschwindet und das rein theoretische Moment einsetzt. Denn die merkwürdigen und rätselhaften Beziehungen zwischen den Zahlen sind das, was die Wißbegierde dieses Handelsvolkes, für welches die Zahl im praktischen Leben sehr viel bedeutete, am meisten reizen mußte.

Pythagoras (etwa 580–500 v. Chr.).

Die Zahl wurde die Grundlage der ganzen pythagoreischen Philosophie. Sie sollte das Wesen der Welt bilden und die Natur der Dinge begreifen lehren. Die Pythagoreer, sagt Aristoteles (Metaphys. I, 5), begannen das Studium der mathematischen Wissenschaften und gingen so völlig in ihren Grundsätzen auf, daß sie diese auch für die Prinzipien des Seins hielten. Es ist die Ansicht, die sich in der orphischen Anrufung ausprägt:

Die Zahl.

> Hilf uns, mächtige Zahl, die Götter und Menschen erzeugt hat,
> Heilige Vierheit du, die der ewig strömenden Schöpfung
> Wurzel enthält und Quell! Denn es geht die göttliche Urzahl
> Aus von der Einheit Tiefen, der unvermischten, bis daß sie
> Kommt zu der heiligen Vier, die gebiert dann die Mutter des Alls, die
> Erstentstand'ne, die alles umfasset und alles umgrenzet,
> Nie abirret und nie ermattet, die heilige Zehn, die
> Schlüsselhalt'rin der Welt, die der Urzahl gleichet in allem.

Die Erzeugung der Zehn aus der Vier ist so gemeint, daß Zehn die Summe der vier ersten Zahlen ist. Die Vier und die Zehn bilden die Zahlen, auf welche die Pythagoreer alles zurückzuführen suchten. Daher rührt z. B. auch die Vierzahl der Elemente, die zehn Himmelskörper, die sie annehmen usw.

Die Lehre des Pythagoras ist aber durchaus nicht eine rein spekulative, sondern hat auch einen praktischen Hintergrund. Er ist der Gründer einer

Das pythagoreische Bildungsideal.

politischen Gemeinschaft, und die Beschäftigung mit der Wissenschaft hat den Zweck der Erhebung über die Denkweise der blöden Masse zu einem höheren Dasein. Die pythagoreische Wissenschaft tritt von Anfang an als ein Erziehungsmittel auf, sie schafft das, was von nun an nie mehr verloren geht und auch in der Gegenwart noch fortblüht, den Begriff einer Bildung, die ohne Beziehung auf die praktischen Aufgaben allein in der geistigen Vollendung an sich ihr Ziel sieht und die Vermengung mit einer gewerblichen Zweckbestimmung verabscheut.

Umgrenzung der Mathematik.

Das Wort Mathematik bedeutet von Haus aus nichts anderes als eine wissenschaftliche Bildung überhaupt. Für diese Entstehung der Mathematik als einer bestimmt umrissenen Wissenschaft ist der äußere Anstoß die Übersiedelung des Pythagoras aus seiner kleinasiatischen Heimat in die aristokratische Stadt Kroton, wo er einen Bund von Männern gründet, die sich über die Plattheit des materiellen Lebens erhaben fühlen und allein auf der Weisheit ihr Leben aufbauen. Mathematiker hießen die Mitglieder dieses Bundes, die sich die selbständige Erforschung der Wahrheit zum Ziele setzten, und Mathematik ihre Wissenschaft. Dieser Begriff ist aber doch nicht so umfassend, wie es hiernach scheinen könnte, weil die Wissenschaft an einer bestimmten Stelle einsetzt und deshalb nur das Wissenschaft genannt wird, was man eben als solche kennt. So ist der griechische Begriff der Mathematik anscheinend weiter und doch nicht umfassender als der moderne Begriff. Es entspricht genau der modernen Anschauungsweise, wenn in der pythagoreischen Schule von mathematischen Körpern im Gegensatz zu den wahrnehmbaren, von mathematischen Figuren und mathematischen Größen gesprochen wird. Archytas von Tarent soll ein Buch „Über Mathematik" betitelt haben, und gerade von ihm wird auch berichtet, daß er zuerst die Mechanik auf Grund mathematischer Prinzipien methodisch begründet habe. In der Tat zeigt die Mechanik bei den Griechen fortan durchaus auch in unserem Sinne mathematischen Charakter und hat diesen in der theoretischen Mechanik auch bis auf die Gegenwart bewahrt.

Die verschiedenen Zweige der mathematischen Wissenschaft.

Was ist es nun im besonderen, was Pythagoras und seine Schule unter Mathematik verstanden haben? Die Antwort darauf läßt sich sehr genau geben. Es ist zunächst das Rechnen und die von den Fesseln der Praxis befreite Geometrie. Sodann ist es die Arithmetik, die aber nicht ohne weiteres mit dem zusammenfällt, was wir darunter verstehen. Arithmetik ist für die Pythagoreer die Lehre von den Zahlen; sie legt auf die symbolische Bedeutung der Zahlen, die wir als unwissenschaftlich zurückweisen würden, den größten Nachdruck. Die rechnerischen Beziehungen zwischen den Zahlen sind nur der Weg, um ihre tiefere Bedeutung zu erkennen und ihre gesetzmäßigen Zusammenhänge bloßzulegen. Die Lehre von den Brüchen erscheint in einer eigentümlichen Form, deren Nachwirkungen aber im Unterricht bis in die Gegenwart fortdauern, nämlich in der Form der Proportionenlehre. Diese Proportionenlehre aber wird sofort auf ein scheinbar fernliegendes Gebiet, nämlich auf die Musik angewendet. Es ist ja die große Entdeckung der Pythagoreer, vielleicht schon

des Pythagoras selbst, daß die musikalischen Harmonien auf einfachen Zahlenverhältnissen beruhen, und diese Zahlenverhältnisse werden nun so eng mit den musikalischen Harmonien verquickt, daß man vielfach nicht weiß, ob von musikalischen Harmonien oder bloß von arithmetischen Proportionen die Rede ist. Als viertes Element tritt die Betrachtung des Himmels hinzu. Auch diese Betrachtung erstreckt ihre Nachwirkung bis in die Gegenwart hinein, sie prägt sich in dem heute noch gebräuchlichen Ausdruck sphärische Astronomie aus. Weil nämlich die Gestirne auf bestimmten Kugeln liegen sollten, kam die ganze Astronomie der Pythagoreer wesentlich auf die Betrachtung der Größenverhältnisse und Bewegungen dieser Kugeln hinaus und wird deshalb auch als Sphärik bezeichnet. So heißt es in einem Fragment des Archytas: „Diese Wissenschaften (mathemata): Geometrie, Zahlen, Sphärik, Musik, sind verschwistert.“ Die Vierteilung ist hier deutlich ausgesprochen, sie findet sich ebenso deutlich auch bei Platon ausgeprägt und hat sich von da an lange Zeit erhalten. Durch das Lehrwerk des Martianus Capella ging sie als Quadrivium auf das christliche Mittelalter über, und erst sehr spät hat sich die Zweiteilung der Mathematik in Arithmetik und Geometrie durchgesetzt. In der Renaissance wurde zu der Mathematik alles hinzugerechnet, was ihrem Geiste irgendwie entsprach und sich mit ihr in Zusammenhang bringen ließ, sogar die Architektur und das Kriegswesen. Erst durch die allmähliche Loslösung der Anwendungsgebiete ist das übriggeblieben, was wir heute Mathematik nennen.

Entstehung des Begriffes der Mathematik im heutigen Sinne.

Merkwürdigerweise entspricht dies aber ziemlich genau wieder dem altpythagoreischen Begriff. Denn was hier beabsichtigt ist, ist doch schließlich die Loslösung der reinmathematischen Formen. Zahlenlehre und Proportionenlehre, d. h. die Wissenschaft der ganzen und der gebrochenen Zahlen, bilden zusammen das, was wir heute Arithmetik nennen. Die Geometrie der Pythagoreer ist wesentlich Geometrie der Ebene. Eine systematische Raumgeometrie fehlt noch. Die Astronomie ist nicht viel anderes wie die heutige Kinematik oder reine Bewegungslehre. Von einer Trennung des mathematischen Raumes von dem Weltraum ist in jener Zeit keine Rede. Beides fällt vielmehr unmittelbar zusammen ebenso wie die Lehre von den gebrochenen Zahlen mit der Lehre von den musikalischen Harmonien. Der Begriff der Bewegung ist mit der Bewegung der himmlischen und irdischen Körper untrennbar verbunden. Der geometrische Punkt ist unmittelbar das Element des Weltenraumes wie die Einheit das Element der Zahl, die Pythagoreer schaffen eine Art mathematischer Atomistik. An dem Quadrat und seiner Diagonale scheint schon Pythagoras gefunden zu haben — und das ist vielleicht seine größte mathematische Leistung gewesen —, daß das Verhältnis zweier Längen nicht immer durch das Verhältnis zweier Zahlen angegeben werden kann. Daher bedeuten die Längen, die sich die Pythagoreer als eine Anhäufung von Punkten und in ihrem Verhältnis zu den Punkten wie die Zahlen zur Einheit dachten, eine neue Größenart, und die geometrische Proportionenlehre muß gesondert entwickelt werden.

So haben wir in der pythagoreischen Schule den Ursprung des Begriffes der Mathematik zu suchen, und es ist auffallend, welch sichere Erkenntnis des methodischen Charakters und des systematischen Zusammenhangs uns gleich auf den ersten Entwicklungsstufen begegnet. Von Anfang an aber tritt die Mathematik als ein wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Bildung auf. Die Mathematik ist entstanden als ein Erziehungsmittel, denn Pythagoras und seine ersten Anhänger haben sicher nicht geglaubt, daß sie die ersten Bausteine zu einer großen künftigen Wissenschaft zusammentrugen, sie haben vielmehr gemeint, einen Abschluß erreicht zu haben, ihnen war die Erkenntnis der Welt in ihrem Wesen und Zusammenhang, nicht die Auffindung mathematischer Lehrsätze der Hauptzielpunkt. Diese Ideen zeigen vielfach eine auffallende Verwandtschaft mit den Gedanken, die bei der Wiedergeburt der Naturwissenschaften in der Zeit Galileis die leitenden waren. Man lese nur das folgende uns erhaltene Fragment des Archytas: „Aufruhr dämpft's, Eintracht erhöht's, wenn die Rechnung stimmt. Denn dann gibt's keine Übervorteilung und es herrscht Gleichheit. Denn auf Grund der Rechnung setzen wir uns über die gegenseitigen Handelsverpflichtungen auseinander. Deswegen nehmen die Armen von den Vermögenden und die Reichen geben den Bedürftigen, weil sie beide sich auf Grund der Rechnung darauf verlassen, daß sie so das Gleiche besitzen werden. So ist sie Richtschnur der Redlichen und Hemmschuh der Unredlichen und veranlaßt die, die rechnen können, noch vor der Unredlichkeit innezuhalten, da sie ihnen klarmacht, daß sie bei der Abrechnung doch nicht unentdeckt bleiben werden; diejenigen aber, die nicht rechnen können, zwingt sie, von der Unredlichkeit abzulassen, nachdem sie ihnen auf Grund der Rechnung nachgewiesen, daß sie unredlich gewesen sind."

Die ersten mathematischen Lehrbücher.

Im 5. Jahrhundert v. Chr. entstand das erste mathematische Lehrbuch, die Elemente des Hippokrates von Chios. Kurz nach ihm lieferte Leon, ein Zeitgenosse Platons, ein neues, bedeutend verbessertes Elementarbuch. Platon konnte sich daher bereits auf einen ausgebildeten mathematischen Lehrbetrieb stützen, wenn er die Forderung aufstellte, daß niemand das Studium der Philosophie beginnen sollte, ohne vorher gründlich Mathematik gelernt zu haben. Aus den Kreisen der Akademie heraus schrieb Theudios kurz nach Leon ein drittes Werk über die Elemente der Geometrie. Was den Inhalt dieser Lehrbücher betrifft, so scheint es nicht unwahrscheinlich, daß er mit der Umgrenzung der Euklidischen Elemente zusammenfällt, nur ist die Darstellung sicher viel weniger entwickelt, die Begründung lückenhafter. Es entspricht aber so ganz dem pythagoreischen Geiste, daß zuerst die regulären Polygone und dann die regulären Polyeder den letzten Zielpunkt bilden, ohne daß eine allgemeine Entwicklung der Raumgeometrie voraufgeht. Man bedenke die Rolle, welche die letzteren in der pythagoreischen Philosophie und auch in Platons Timäus spielen.

Ägyptische Einflüsse.

Daneben sind die Nachwirkungen der ägyptischen Einflüsse deutlich zu erkennen. Dahin gehört wesentlich die Lehre vom Flächeninhalt und von der Ähnlichkeit der Figuren, die bei Euklid den Inhalt des ersten und des sechsten

Buches bildet. Unmittelbare Beziehungen mit Ägypten sind für spätere griechische Gelehrte auch sicher festgestellt. So war Oenopides von Chios in Ägypten und soll von dort die Kenntnis von der Schiefe der Ekliptik und die Konstruktion des Lotes auf einer geraden Linie mitgebracht haben. Auch Demokrit von Abdera ist aller Wahrscheinlichkeit nach längere Zeit in Ägypten gewesen. Wir kennen ihn hauptsächlich als materialistischen Philosophen, aber er ist nicht bloß der Schöpfer einer besonderen Raumphysik, er hat auch, wie wir jetzt wissen, die pythagoreische Lehre von der Zusammensetzung der Linien, Flächen und Körper aus den Punkten zur Gewinnung geometrischer Wahrheiten ausgebeutet und damit dieselbe Lehre entwickelt, die später im 17. Jahrhundert unserer Zeitrechnung als Indivisibelnlehre den Ausgangspunkt der modernen Infinitesimalrechnung gebildet hat. Er hat demnach wohl nicht so unrecht, wenn er von sich selbst sagt: „In den geometrischen Konstruktionen auf Grund eines bestimmten Beweisverfahrens hat mich keiner übertroffen, selbst nicht die ägyptischen Harpedonapten".

Die Quadratur des Kreises.

Wie sich auf der Grundlage der ägyptischen Mathematik die griechische Geometrie entwickelt hat, dafür gibt es kaum ein charakteristischeres Beispiel als das berühmte Problem der Quadratur des Kreises. Die Ägypter hatten rein praktisch das Verhältnis des Kreisumfanges zum Kreisdurchmesser oder auch die Seite eines Quadrates, das dem Kreise inhaltsgleich ist, mit genügender Annäherung bestimmt. Das Bewußtsein, daß es sich dabei um eine Annäherung handle und überhaupt eine klare Erkenntnis, was eine Annäherung im Gegensatz zu der beweisbaren Konstruktion bedeutet, war bei ihnen noch nicht vorhanden. Die Griechen selbst hatten inzwischen die Geometrie des Kreises, von Thales ausgehend, in einer Weise, die den Ägyptern anscheinend fremd war, entwickelt. In diese Kreisgeometrie und die übrigen Flächenbestimmungen suchten sie nun auch die Bestimmung des dem Kreise inhaltsgleichen Quadrates einzureihen. Sie versuchten das Unmögliche, dieses Quadrat auf Grund einer beweisbaren, also theoretisch unbegrenzt genauen Konstruktion mit Zirkel und Lineal zu finden. Sie strebten zu einer logischen Entwicklung abzuklären, was ihnen vielleicht die Baumeister nach der aus Ägypten stammenden Regel als tatsächlich richtig angaben. Der erste, der über die Kreisquadratur schrieb, soll nach Plutarch Anaxagoras gewesen sein. Kurz darauf gab Antiphon, ein Zeitgenosse des Sokrates, das bekannte Verfahren der dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Vielecke von beständig steigender Seitenzahl an, das ungefähr zweihundert Jahre später bei Archimedes zu einem gewissen Abschluß und zu einem sehr brauchbaren Resultate fortgeführt ist. Noch in das fünfte Jahrhundert fällt die Arbeit des Hippokrates von Chios, die uns durch den Bericht des Eudemus zum Teil erhalten ist und zeigt, auf welchen Irrwegen man das Ziel zu erreichen suchte. Freilich sind diese Irrwege keine Irrwege des Denkens, sondern nur der Aufgabestellung.

Andere Probleme.

Zu dem Problem der Kreisquadratur kommen die anderen Probleme der Würfelverdoppelung und der Dreiteilung des Winkels, die sich in Griechenland selbst, ohne Rücksicht auf die wenigstens für das erste von den Ägyptern

gegebene praktische Lösung entwickelten. Sie sind als Probleme der theoretischen Geometrie ebenfalls unlösbar, wenn man die an sich allerdings völlig willkürliche Forderung aufstellt, sie durch eine theoretisch absolut genaue Konstruktion mit Hilfe von Zirkel und Lineal zu lösen. Dabei haben aber gerade sie zu den feinsten Untersuchungen geführt. Die wirklichen Resultate, welche die Griechen von diesen Problemen ausgehend erhielten, zeigen gerade, wie belanglos die theoretische Lösbarkeit mit Zirkel und Lineal ist. Es ist nur ein geistiger Sport, eine solche Lösung zu suchen. Aber die Geometrie wurde überhaupt von den Griechen als ein geistiger Sport angesehen, der die genaue Parallele zu den leidenschaftlich gepflegten Leibesübungen bildet. Eine solche Pflege wurde nur möglich durch einen großen wirtschaftlichen Wohlstand; bei einem Volke, das in hartem Daseinskampfe steht, ist sie undenkbar. Sie verlangt aber auch einen Widerstand gegen die erschlaffende Wirkung des Wohllebens, ein Beharren in einfachen Lebensbedingungen. Deshalb eben haben die Griechen die formale Geistesbildung so hoch geschätzt, weil ihnen der äußere Luxus wenig bedeutete. Mit dem Steigen der äußeren Kultur wächst das Interesse für die praktischen Aufgaben und sinkt die rein theoretische Wissenschaft. Aber doch ist eine solche rein geistige Tätigkeit, wie sie die griechische Geometrie bedeutet, nur deshalb möglich gewesen, weil Handel und Industrie, die Arbeit vieler fleißigen Hände einer vom Schicksal begünstigten Klasse von Menschen die Möglichkeit gab, frei ihren Neigungen zu folgen und auch die Künstler und Gelehrten erhielt, deren Arbeit nicht unmittelbar zum Nahrungserwerb dienen konnte. Auch die Mathematiker von Beruf, wenn sie nicht von Hause aus wohlhabend waren, müssen durch den Unterricht, den sie vermögenden jungen Leuten gaben, ihren Lebensunterhalt gewonnen haben. Es wird erzählt, die von den Pythagoreern zuerst geheimgehaltene mathematische Wissenschaft sei dadurch in weiteren Kreisen bekannt geworden, daß einem armen Mitgliede des Bundes gestattet wurde, sich mit ihrer Hilfe sein Brot zu verdienen. Auf diese Weise ist es auch für die Ausbildung der mathematischen Forschung wesentlich gewesen, daß sie als ein Bestandteil der höheren Allgemeinbildung angesehen wurde und sich dementsprechend didaktisch verwerten ließ. Man muß sich einmal klarmachen, wie ungeheuer schwer der Gedanke einer Spezialwissenschaft zu fassen war, die den ausschließlichen Lebensberuf einer Reihe von Männern bilden sollte, ohne daß daraus ein sichtbarer praktischer Nutzen entsprang. Selbst heute wird ja niemand für die mathematische Forschungsarbeit bezahlt (nachdem es zwischendurch allerdings einmal anders gewesen ist, solange die Akademien für sich und nicht im Zusammenhang mit den Universitäten bestanden). Die materielle Existenz des mathematischen Forschers gründet sich heute auf eine Lehrtätigkeit, die unmittelbar, durch die Ausbildung geeigneter Lehrkräfte, doch der Allgemeinbildung oder aber einer praktischen Fachbildung zugute kommen soll.

Die griechische Geometrie ein geistiger Sport.

Geringe Verbreitung der wissenschaftlichen Mathematik bei den Griechen.

Indessen dürfen wir wohl nicht denken, daß die Gesamtheit der Gebildeten im griechischen Altertum eine so weitgehende mathematische Bildung

empfangen habe, wie sie die Euklidischen Elemente in ihrer Gesamtheit darstellen. Im Gegenteil bedeutete sicher die Beschäftigung mit der Mathematik in solcher Ausdehnung ein besonderes Fachwissen und ist einer kleineren Gruppe von Männern vorbehalten geblieben. Sie war gewiß auch lokal eng begrenzt und empfing durch die antiken Hochschulen von Athen, Alexandria usw. ihre Hauptstütze. Die technischen Berufe standen mit diesen Hochschulen nicht in Berührung, sie hielten an den überkommenen Kenntnissen fest und hatten von der theoretischen Mathematik nur geringen Nutzen. Das erklärt es wohl, wenn veraltete Regeln und Formeln, die den inzwischen gewonnenen Resultaten direkt widersprechen, sich immer wieder finden. Erst unter der Herrschaft der Römer haben aber gerade die praktischen Zweige einen Einfluß auf die allgemeine Bildung ausgeübt, indem die hochentwickelte äußere Kultur allen Gebildeten eine gewisse Rücksichtnahme auf das technische Wissen nahelegte. So erklärt sich z. B. auch das Werk des Vitruv, das die Baukunst keineswegs für die Architekten, sondern für die literarisch Interessierten behandelt und wohl auch nicht von einem Berufsarchitekten herrührt.

Wenn wir im allgemeinen Unterricht der Römer und des christlichen Mittelalters von der Entwicklung der griechischen Geometrie wenig Spuren finden können, so ist das wohl kein Verfall eines früheren Zustandes, sondern auch vorher außerhalb bestimmter Schulen nie anders gewesen. Würden wir also die Frage stellen, wann der Inhalt der Euklidischen Elemente zuerst wirklich zum Bestandteil der höheren Allgemeinbildung wurde, so würden wir über das neunzehnte Jahrhundert kaum zurückgehen können. Auffallend aber ist es, daß sich auch bis in die neueste Zeit hinein noch Traditionen aus der voreuklidischen, ja aus der vorgriechischen Zeit im Unterricht erhalten haben, die wir durch alle Jahrhunderte vorher zurückverfolgen können. Das allein läßt schon darauf schließen, daß die wissenschaftliche Mathematik der Griechen in weitere Kreise keinen Eingang gefunden hatte, daß sich vielmehr die Mathematik der Praktiker völlig unabhängig von jener theoretischen Mathematik gehalten und als eine Unterströmung während der ganzen Entwicklungszeit der griechischen Geometrie fortbestanden hat, nur daß wir keine literarischen Denkmäler von ihr aus dieser Zeit besitzen. Dies ist ja auch verständlich, weil sie sich im allgemeinen durch die persönliche Überlieferung vom Meister auf den Lehrling und nicht in der Form der schriftlichen Mitteilung fortpflanzte. Erst bei Heron und den römischen Agrimensoren sehen wir sie wieder an die Oberfläche treten, bei Heron vertieft durch die dazwischengetretene wissenschaftliche Geometrie der Griechen, bei den Agrimensoren roh und ungelenk, als hätte es nie einen Euklid gegeben.

Zähigkeit der primitiven Mathematik.

Der Gegensatz der praktischen und theoretischen Mathematik, wie ihn die griechische Bildung ausgeprägt hat und wie er sich fortan erhält, ist im Grunde ein Gegensatz der Berufe. Die theoretische Mathematik ist eine Liebhaberei der vornehmen Stände, welche über der wirtschaftlichen Erwerbsarbeit stehen und auf sie verachtend herabblicken. Die einzig würdigen Berufe sind ihnen Staatsverwaltung und Kriegsdienst. Davon ist auch bei

Platon (427—347 v. Chr.)

Platon immer allein die Rede. Wo er von den Anwendungen der Mathematik spricht, durch die sie sich nützlich erweisen soll, nennt er bloß die militärischen. Von den viel näherliegenden Anwendungen auf Künste und Gewerbe sagt er nichts. Alle diese Tätigkeiten existieren für sein aristokratisches Bewußtsein überhaupt nicht. Bei der Arithmetik spricht er mit dem Ausdruck tiefster Verachtung von dem praktischen Gebrauch, den die Kaufleute davon machen. Die wahre Bedeutung der Mathematik ist für ihn eine ganz andere, sie besteht in dem klärenden und befreienden Einfluß, den sie auf den Geist ausübt. Sie zieht ihn von den gemeinen irdischen Dingen ab und lenkt ihn auf das Ewige und Unvergängliche hin. Ihre Rolle ist die des Vermittelns zwischen dem sinnlich Wahrnehmbaren und dem nur durch die Vernunft zu Erkennenden. Ihre Aussagen knüpfen nämlich zwar an die Gegenstände der Wahrnehmung an, sind aber nur als ein Prozeß des reinen Denkens zu verstehen. Sie nötigen die Seele, sich der Vernunft zu bedienen, um die Wahrheit zu erkennen. Diese platonische Auffassung ist später nie verschwunden. Wenn wir z. B. lesen, was Herbart über den pädagogischen Wert der Mathematik gesagt hat, so klingt es genau an Platons Worte an. Es ist für die Mathematiker sehr schmeichelhaft, wenn Platon weiter meint, daß alle, die von Natur Arithmetiker sind, auch für alle anderen Kenntnisse ein rasches Fassungsvermögen zeigen. Wenn er dann weiter hinzufügt, daß die, welche von der Natur eine langsame Auffassung bekommen haben, durch die Unterweisung in der Mathematik, wenn sie auch keinen anderen Nutzen daraus ziehen sollten, doch wenigstens ein besseres Auffassungsvermögen erwärben, so erinnert das ebenfalls sehr an die Gründe, die später im 19. Jahrhundert immer wieder zugunsten des Mathematikunterrichtes an den höheren Schulen angeführt worden sind.

Die Mathematik vermittelt den Übergang von den vergänglichen Erscheinungen zu der ewigen Idee.

Bei Platon findet sich auch der deutliche Hinweis darauf, daß die geometrische Betrachtung sich nicht auf die wirklichen Figuren, sondern auf Idealbilder beziehe, die aus diesen Figuren abstrahiert werden. Auf diese idealen Figuren soll sich auch der Begriff der Bewegung beziehen. Der Begriff einer mathematischen Physik im heutigen Sinne ist schon zu Platons Zeit merkwürdig deutlich ausgeprägt. Die Bewegungslehre fällt mit der Astronomie durchaus zusammen, die Bewegung der Gestirne liefert überhaupt erst den Begriff der Bewegung, so wie er hier gefaßt wird. Die Gestirne bilden das Beste und Vollkommenste, was es im Bereich des Wahrnehmbaren gibt, aber bleiben doch hinter dem wahrhaftigen Sein weit zurück. Diesem wahren Sein kommt man näher, wenn man die Bewegung rein an sich, nach dem wahrhaften Maße ihrer Geschwindigkeit und Langsamkeit betrachtet, genau wie es die moderne Kinematik tut. Es wird so der eigentümliche Gesichtspunkt der Vollkommenheit der herrschende, das gedankliche Sein ist vollkommener als alles der Wahrnehmung Zugängliche. Von diesen ewigen Seinsformen gibt die Mathematik Kenntnis, ihre Prozesse sind daher nicht eines praktischen Zweckes wegen da, sondern bloß um der Erkenntnis willen zu betreiben. Sie bereiten die Idee des Guten vor, indem sie die Seele ver-

anlassen, sich dahin zu wenden, wo das Seligste wohnt von alledem, was es gibt, das, wohin wir auf jede Weise unseren Geist hinlenken sollen. Auch bei der musikalischen Harmonielehre bilden die wirklich gehörten Akkorde nicht den eigentlichen Gegenstand, die wahre Aufgabe ist, die absolute Harmonie zu suchen.

Die Dialektik.

Die vier mathematischen Wissenschaften, die Platon im Sinne des pythagoreischen Systems unterscheidet, bilden aber sozusagen nur die wissenschaftliche Propädeutik. Sie haften immer noch an der äußeren Erfahrung, weil sie vom sinnlich Wahrnehmbaren ausgehen. Die Dialektik erst erhebt sich zum reinen Denken. In dieser Hinzufügung der Dialektik liegt der Schritt, den Platon über die Pythagoreer hinaus tut. Hier wirkt der Einfluß des Sokrates, der ja der Schöpfer dieser Dialektik ist. In der eigenartigen Verschmelzung der pythagoreischen und der sokratischen Weisheit liegt eben das Wesen der platonischen Philosophie.

Sokrates (470—399).

Wenn aber die platonische Auffassung der Mathematik, die wohl ziemlich genau die pythagoreische ist, dem Sokrates in den Mund gelegt wird, so ist das eine poetische Freiheit; sie würde dem Bericht, den Xenophon über Sokrates' Auffassung, vielleicht in bewußtem Gegensatz zu Platons Ausdeutung, gegeben hat, direkt zuwiderlaufen. Danach hat Sokrates wohl das Studium der Geometrie, Astronomie und des Rechnens empfohlen, aber nur so weit, wie der praktische Nutzen reicht. Die Geometrie führte er auf die Feldmessung zurück. Jeder soll imstande sein, bei der Übernahme, Übergabe oder Einteilung seines Grundbesitzes, auch bei der Ausgabe der Landarbeit, die Flächen richtig zu bestimmen. Aber das Studium bis zu einer schwer verständlichen Wissenschaft fortzuführen, hielt er nicht für gut. Denn er konnte nicht einsehen, wozu das nützen sollte. Es halte den Menschen nur von der Erwerbung nützlicher Kenntnisse ab. Auch die Astronomie solle sich auf die Bestimmung der Tages- und Jahreszeiten beschränken, was bei Reisen und Arbeiten, die sich nach der Zeit richten, wie beim Landbau, nützlich ist. Das seien Kenntnisse, wie sie die Wächter und Seesteuerleute haben müßten. Aber bis zur Bewegung der Gestirne, der Erforschung ihrer Entfernungen von der Erde und voneinander und der Bestimmung ihrer Umlaufszeiten vordringen zu wollen oder gar nach den Ursachen zu forschen, davon riet er dringend ab. Man sollte nicht über den Geheimnissen der göttlichen Schöpfung brüten. Menschenwitz könne das nicht fassen und es sei vermessen, aufdecken zu wollen, was Gott uns absichtlich verhüllt hat. So solle man sich auch in der Arithmetik von fruchtlosen Spekulationen fernhalten und immer das Nützliche im Auge behalten. Der Bericht des Xenophon macht keinen unwahrscheinlichen Eindruck, er steht ziemlich in Einklang mit der Art, wie in den historisch treueren Dialogen Platons das geistige Wesen des Sokrates geschildert ist. Sokrates würde sich demnach in diesen Punkten eng mit den Sophisten berühren, denen er überhaupt nicht gar so fernsteht.

Protagoras (485—415).

Von dem Sophisten Protagoras hat nun Platon selbst eine Ansicht mitgeteilt, wonach dieser sich dem rein theoretischen Wissen entschieden feindlich

gegenüberstellt. „Die anderen", sagt er dort, „mißhandeln die Jugend, denn wenn die jungen Menschen vor den Wissenschaften fortlaufen, so schleppen sie sie wieder gegen ihren Willen herbei und quälen sie mit den Wissenschaften und lassen sie Rechnen und Astronomie und Geometrie und Musik treiben. Wenn aber einer zu mir kommt, dann lernt er nur das, weswegen er kommt. Bildung bedeutet im Hause: sein Haus gut und vernünftig verwalten, und im Staat: an den öffentlichen Angelegenheiten redend und handelnd mit Geschick teilnehmen Wenn du zu mir kommst, junger Mann, dann gehst du an dem ersten Tage, an dem du bei mir warst, tüchtiger wieder nach Hause, und ebenso, wenn du wieder kommst; jeder Tag wird dazu dienen, dich tüchtiger zu machen."

Der Gegensatz praktischer und theoretischer Bildung.

Es stehen so schon in dieser frühen Zeit bei den Griechen zwei Ansichten sich schroff gegenüber, der Gedanke der praktischen Schulung und der Gedanke der theoretischen Geistesbildung, und dieser Gegensatz verschwindet fortan nie wieder. Durch die Gründung der Platonischen Akademie wird der theoretischen Auffassung eine mächtige Stütze geliehen. Platon selbst ist nicht eigentlich Mathematiker gewesen, damit würden wir ihm unrecht tun. Er übernahm nur die mathematische Bildung aus der pythagoreischen Schule ihres formalen Bildungswertes wegen und hatte zu ihr etwa dieselbe Stellung wie einer der modernen Philosophen. Er nahm wohl ihre Erkenntnisse willig auf, hatte aber selbst weder den Beruf noch die Neigung, forschend an ihr mitzuarbeiten. Anders ist es mit den Männern, die wirklich Mathematiker von Beruf gewesen sind, Archytas von Tarent, Theätet von Athen und Eudoxos von Knidos, ferner Menächmus, der die Lehre von den Kegelschnitten begründete.

Zenon (490—430 v. Chr.).

Vielleicht der entscheidendste Fortschritt des mathematischen Denkens bei den Griechen hat sich an die Paralogismen angeknüpft, die unter Zenons Namen überliefert sind und vielfach als Beispiele für die Irrwege des griechischen Denkens angeführt werden. In Wahrheit sind sie glänzende Beispiele für den Mut eines ungewöhnlich scharfsinnigen Menschen, der sich durch den scheinbaren Widerspruch seiner Gedanken gegen den gemeinen gesunden Menschenverstand nicht abschrecken läßt. Sie haben zuerst den Einblick in das eigenartige Wesen der unendlichen Prozesse eröffnet, ohne die die Mathematik nicht auskommen kann, die aber in ihr auch die größte Schwierigkeit und den ersten Stein des Anstoßes bilden. Diese Paralogismen sind erst hundert Jahre später durch Eudoxos von Knidos wirklich gelöst worden. Dieser zeigte, daß der Begriff der Gleichheit, wenn man ihn auf unendliche Prozesse ausdehnen will, einer bestimmten Erweiterung bedarf. Diese besteht nach Eudoxos darin, daß zwei Größen (Zahlen, Flächen oder Rauminhalte) gleich heißen, wenn sie sich um weniger unterscheiden als jede noch so kleine angebbare Größe. Die große Geistestat, die in einem so unscheinbaren Satze liegt, ist eben die, daß Eudoxos die rein gedankliche Schwierigkeit bei einer Sache erkannte, welche die unmittelbare Anschauung mit Leichtigkeit bewältigen zu können glaubt.

Eudoxos.

Mit diesen Sätzen ist aber auch das Band, das die Mathematik an die anschauliche Erfassung der Wirklichkeit fesselte, endgültig zerschnitten, und der Gegensatz zwischen praktischer und theoretischer Auffassung nicht bloß ein solcher des Interesses, sondern auch ein Gegensatz der Auffassungsweise geworden.

Euklid.

Eine gewisse Etappe in der Entwicklung bezeichnet der bekannteste aller antiken Geometer, Euklid von Alexandria (um 300 v. Chr.). Die Bücher des Euklid geben in ihrer Gesamtheit ein ziemlich deutliches Bild von der Entwicklung der griechischen Mathematik bis zum Ende des vierten Jahrhunderts vor Christus, nicht bloß bezüglich des Inhaltes, sondern auch hinsichtlich der völligen Theoretisierung der Mathematik, denn sie sind durchaus auf den früheren Arbeiten aufgebaut. Sie zeigen gleichzeitig, welcher Geist an der Hochschule des neuen Ägypterreiches herrschte, auf deren Entstehung die alten Hochschulen der Ägypter vielleicht nicht ohne Einfluß gewesen sind, so sehr sie auch der griechischen Sinnesart entsprach. Denn sie bedeutete im Sinne eines Platon und Aristoteles eine Pflanzstätte rein wissenschaftlichen Strebens, das die Unterweisung des reiferen Jünglingsalters mit dem Durcharbeiten und Ausreifen der früheren Schriftwerke verquickte. Die große Bibliothek, die sich in Alexandria ansammelte, war ein notwendiges Zubehör dieses Lehrbetriebes. Auch Euklid hat nicht in selbständigen Schöpfungen, sondern in der systematischen Zusammenfassung und methodischen Abklärung des vor ihm Geleisteten seine Hauptaufgabe gesehen. Sein bekanntestes Werk sind die Stoicheia (Elemente), welche die Grundlagen des mathematischen Wissens, so wie sie Euklid an der Alexandrinischen Hochschule selbst vortrug, umfassen. Sie vereinigen in sich Geometrie und Arithmetik. Die Astronomie und die Musik hat Euklid in besonderen Lehrwerken behandelt, ebenso wie die inzwischen aus den Aufgaben des griechischen Theaters erwachsene Perspektive (Optik). Die ersten sechs Bücher der Euklidischen Elemente behandeln die Planimetrie, d. h. die alte pythagoreische Geometrie. Dazwischen ist aber im fünften Buch die durch Eudoxos geschaffene exakte Proportionenlehre eingeschaltet, durch deren Resultate die neue Darstellung der Ähnlichkeitslehre im sechsten Buch wesentlich bedingt wird. Die Lehre von den irrationalen Zahlen, die das siebente bis neunte Buch füllt, ist wohl wesentlich nach Theätet gegeben. Im zehnten, die Theorie der Irrationalzahlen vertiefenden Buch scheint eine von Theätet stammende Grundlage frei ausgestaltet zu sein. Das elfte und zwölfte Buch enthalten die elementare Stereometrie, deren Fehlen Platon noch beklagte, hauptsächlich auf der durch Eudoxos geschaffenen exakten Behandlung fußend, welche insbesondere die Formel für den Inhalt der Pyramide von der durch Demokrit hineingebrachten metaphysischen Beimengung befreit. Das dreizehnte Buch endlich bringt die regulären Körper und damit findet das Werk ganz im pythagoreischen Sinne seinen Abschluß.

Euklids Einfluß.

Die Euklidische Behandlung hat auf den mathematischen Unterricht aller späteren Zeiten bis in die Gegenwart hinein den größten Einfluß ausgeübt.

Auch ihre Mängel hat man ohne Widerspruch hingenommen. Im Gegenteil galt Euklid immer für das Muster einer streng logischen Darstellung. Dennoch ist er keineswegs von logischen Schwächen frei. Die größten zeigen sich vielleicht in den stereometrischen Büchern, eben weil sie der Entstehungszeit ihres Inhaltes nach die jüngsten sind. So ist z. B. der Kongruenzbegriff für den Raum nur mangelhaft entwickelt. Die Schwierigkeit lag bei der Raumgeometrie eben darin, die für die Ebene voll ausgebildete Geometrie auch auf den Raum zu übertragen. Für die ebene Geometrie gibt die Zeichnung den natürlichen Anhalt. Es brauchen ja nur die wirklichen Konstruktionen zu ihrem Idealbild abgeklärt zu werden, um die grundlegenden geometrischen Prozesse zu liefern. Bei der Raumgeometrie ist das anders, die begrenzten Körper, die sich wirklich herstellen lassen, geben nicht unmittelbar die genügende Grundlage für die logische Entwicklung. Daher treten bei Euklid rein gedankliche Operationen mit geraden Linien und Ebenen im Raum (Gedankenexperimente, wie Mach sagt) an die Stelle, die einfach nach Analogie der in der Ebene wirklich ausführbaren Konstruktionen gebildet sind. Darin liegt zwar keine begriffliche, aber eine erhebliche pädagogische Schwierigkeit, denn diese Raumgeometrie erfordert zu ihrem Verständnis ein hochentwickeltes Anschauungsvermögen, und wenn sie den einfachsten Sätzen über begrenzte Körper im Unterricht vorangestellt wird, so heißt das, das Schwierigere dem Leichteren voraufgehen lassen, was aller pädagogischen Klugheit zuwiderläuft. Erst in der neuesten Zeit hat man aber angefangen, in einem propädeutischen Kurs von den begrenzten Körpern methodisch auszugehen. Wie früher die Euklidischen Elemente als das Muster einer strengen mathematischen Darstellung galten, sind sie auch in pädagogischer Beziehung immer für das unübertreffbare Muster gehalten worden. Zwei Jahrtausende lang ist Unterricht in der Mathematik und Unterricht in den Elementen des Euklid gleichbedeutend gewesen. Dies wurde erst anders, als sich der Unterricht fortschrittlicher zu gestalten begann und durch die wirkliche kritische Durcharbeitung der Euklidischen Methode, die unserer Zeit vorbehalten geblieben ist, diese Methode eine wesentliche Korrektur und Ergänzung erfuhr. Das Wesen der geometrischen Wissenschaft sieht man heute darin, daß alle geometrischen Sätze in zwei Gruppen geschieden werden, eine kleine Gruppe, welche die sogenannten Axiome bilden, und eine große Gruppe, der alle anderen Sätze angehören. Die Sätze der ersten Gruppe bleiben unbewiesen, aus ihnen sind aber alle Sätze der zweiten Gruppe bloße logische Folgerungen. In dieser Weise treten jedoch die Axiome bei Euklid nicht auf, seine Postulate bilden nur einen Teil eines vollständigen Systems von Axiomen, sie sind auch in ihrer Formulierung zum Teil unvollkommen, sie sind als unbewiesene, der Anschauung entlehnte Sätze nicht klar erkannt.

Weitere Entwicklung der griechischen Mathematik.

Archimedes von Syrakus und Apollonius von Perga, die in dem Jahrhundert nach Euklid lebten, bedeuten in gewissem Sinne den Höhepunkt der griechischen Mathematik. Ihre Schriften sind uns durch ein gütiges Geschick auch zum Teil erhalten geblieben. Dies gilt aber keineswegs von allen mathe-

matischen Untersuchungen, von vielen haben wir nur durch Sammelwerke aus der Verfallzeit Kenntnis. Das Werk des Diophant, das entschieden aus der Verfallzeit der mathematischen Forschung (etwa aus dem 3. Jahrhundert n. Chr.) herrührt, überrascht trotzdem durch die Fülle der interessantesten arithmetischen Aufgaben und Sätze, die es enthält. Es ist geradezu die Grundlage der modernen Zahlentheorie geworden. Dieser Inhalt beruht aber hauptsächlich auf früheren arithmetischen Arbeiten, von denen sich sonst keine Spur erhalten hat. Selbst in dieser späteren Kaiserzeit steht noch das Studium der Mathematik an der Hochschule von Alexandria in Blüte, es fehlt nur die Fähigkeit zum selbständigen wissenschaftlichen Weiterarbeiten. Einen deutlichen Einblick in den Lehrbetrieb gibt in mathematischer Hinsicht das Sammelwerk des Pappus (Ende des 3. Jahrhunderts n. Chr), das seiner Lehrtätigkeit an der Hochschule von Alexandria entstammt. Pappus gibt gedrängte Überblicke über die Werke der großen griechischen Geometer, die in systematischen Lehrgängen durchgenommen werden, und knüpft daran Ausführungen, die den Studierenden das Verständnis der Originalwerke erleichtern sollen. Gerade das Auftreten der ausführlichen Kommentare in der späteren Zeit zeigt die abnehmende Fähigkeit des mathematischen Denkens. Man empfand Lücken, wo die Darstellung in der klassischen Zeit für das Verständnis ausführlich genug gewesen war.

Pappus.

Dazu kommt, daß allgemein das Interesse für die vergangene Blütezeit der griechischen Literatur die Herrschaft führt. Die Werke der alten Gelehrten und Dichter werden kommentiert, gesammelt und ausgezogen. Diese rückblickende Tendenz, mit der die Entwicklung der philologischen Wissenschaft zusammenhängt und die auch die Philosophie der späteren Zeit beherrscht, zeigt sich der unmittelbaren mathematischen Forschung ungünstig; sie beschränkt die Beschäftigung mit der Mathematik mehr und mehr auf das Sammeln und Kommentieren der Werke aus der Blütezeit.

In der nacharchimedischen Zeit wandte sich das mathematische Interesse zunächst vor allem der Kurvenlehre zu. Nikomedes fand die Konchoide, Perseus die spirischen Linien, Diokles die Kissoide usw. Daneben stehen viele andere Untersuchungen, aber es erschöpft sich doch mehr und mehr der Bereich dessen, was die Griechen mit ihren Methoden und Anschauungen in der Mathematik bewältigen konnten. Statt der rein mathematischen Probleme treten jetzt wieder die Anwendungsgebiete des mathematischen Denkens mächtig hervor. Die griechische Astronomie erreicht in Hipparch (tätig zwischen 161 und 126 v. Chr.) ihre höchste Blüte. Er versucht eine geometrische Darstellung der Bewegung von Sonne und Mond, er vervollständigt das schon von Aristarch aus Samos angewendete Verfahren zur Bestimmung der Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde, er entdeckt die Präzession der Tag- und Nachtgleichen und berechnet die erste Sehnentafel. In dieser Ausbildung der Astronomie steckt auch ein großes Stück Mathematik. Es entwickelt sich eben die antike Trigonometrie, die in der Sphärik des Menelaos von Alexandria (um 100 n. Chr.) ein erstes Kompendium findet. Sie erhält

Die Astronomie.

dann ihren Abschluß in der „großen Zusammenstellung“ (dem Almagest) des Claudius Ptolemaeus (2. Jahrhundert n. Chr.). Die allgemeine Signatur dieser Zeit ist entschieden das mit der äußeren Kultur sich entwickelnde Interesse für die praktischen Aufgaben. Die praktische Mathematik, die neben der theoretischen Geometrie auch in der Blütezeit immer fortbestanden hat, tritt nun auch literarisch in die Öffentlichkeit. Das ist das Bezeichnende an den Schriften des Heron von Alexandria, deren Entstehung und Zusammenhang allerdings noch immer nicht vollständig geklärt ist. Zum Teil handelt es sich vielleicht auch um ein erneutes Hervortreten der alten einheimischen ägyptischen Mathematik gegenüber der importierten griechischen Wissenschaft. Die praktische Geometrie der Griechen ist aber wahrscheinlich hiervon auch nicht sehr verschieden gewesen. Was die römischen Agrimensoren bringen, ist die übernommene griechisch-ägyptische Feldmeßkunst.

Heron.

Reaktion gegen die mathematische Erkenntnis.

Dieser Wandel des Interesses bedingt im späteren Altertum allerdings zum Teil auch ein Widerstreben gegen die mathematische Erkenntnis. Der menschliche Geist wendet sich mehr und mehr der mystischen oder schlichtgläubigen Versenkung in die übernatürlichen Dinge zu, und die Indifferenz des mathematischen Wissens den Begriffen des Guten oder Bösen gegenüber läßt es als eine niedrigere Stufe der geistigen Tätigkeit zurücktreten. Die Bedeutung, die es behält, ist nur die symbolische, die schon in der pythagoreischen Schule eine große Rolle spielte. Die Arithmetik wird ein Teil der Theologie: man sucht in den Zahlen Aufschluß über das göttliche Wesen. Daher das Interesse, das die Arithmetik genießt; das Grundwerk, die Einführung in die Arithmetik des Nikomachus von Gerasa, wurde alsbald von Apuleius ins Lateinische übersetzt, was immerhin soviel bedeutete, als wenn ein wissenschaftliches Werk im 17. Jahrhundert ins Deutsche übersetzt wurde. Nach Nikomachus kommt noch Diophantus von Alexandria. So läuft eine streng wissenschaftliche Arithmetik neben der mystischen Ausdeutung der Zahlbeziehungen her, und von einem Niedergang der mathematischen Studien können wir auch in dieser Zeit nicht eigentlich sprechen.

Fortdauern der Arithmetik.

Auch Augustin schätzt die Wissenschaft der Zahlen sehr hoch ein, er sagt (De doctrina christiana, lib. II, cap. XXXVIII), die Zahlenwissenschaft sei nicht von den Menschen geschaffen, sondern in der Natur der Dinge gelegen und von den Menschen nur gefunden. „Ob die Zahlen für sich selbst betrachtet oder ihre Gesetze auf Figuren oder Töne oder andere Bewegungen angewendet werden, immer haben sie ihre unwandelbaren Regeln, die auf keine Weise von den Menschen geschaffen worden sind, sondern nur durch den Scharfsinn kluger Leute erkannt werden.“

Die römische Mathematik. Varro.

Den Übergang der griechischen Mathematik an die Römer kann man am deutlichsten an dem Lehrwerke des Varro erkennen, der im letzten Jahrhundert vor Christus gelebt hat. Eine Schrift über das Vermessungswesen von ihm scheint verloren gegangen. Erhalten dagegen ist die von ihm verfaßte Enzyklopädie, die den Titel De disciplinis führt und der Reihe nach

Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Geometrie, Arithmetik, Astronomie, Medizin und Architektur behandelt. Auf ihn folgen dann die Agrimensoren: Frontinus, Hyginus, Balbus, und wie sie alle heißen, welche die vorwiegend praktische Auffassung der Römer zeigen und in dem, was sie als richtig hinnehmen, ohne sich um einen Beweis zu bemühen, zum Teil weit hinter der griechischen Mathematik zurückbleiben. Schon bei Vitruv findet sich in dem Werke über die Baukunst für das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser der Wert $3\frac{1}{8}$, der ungenauer ist als der von Archimedes angegebene, aber keineswegs erst von diesem gefundene Wert $3\frac{1}{7}$. Im Mittelalter zeigt sich dann selbst wieder der ganz ungenaue Wert 3. Für den Unterricht ist von der größten Bedeutung ein dem Werk des Varro nachgebildetes Kompendium aus dem Anfang des 5. Jahrhunderts geworden, das des Martianus Capella. Nur sind hier Medizin und Architektur als besondere Fachwissenschaften ausgefallen. Durch Martianus wird die Unterscheidung von sieben „freien Künsten“ — der alten pythagoreischen Vierzahl der mathematischen Disziplinen und den sprachlichen Fächern Grammatik, Rhetorik und Dialektik statt der Dialektik allein, die Platon angibt — für das ganze Mittelalter festgelegt. Die sieben Künste treten in der abgeschmackten Einleitung des Buches, die die Hochzeit des Merkur mit der Philologie behandelt, als Personen verkörpert auf. Das Werk des Martianus wird vom christlichen Mittelalter als ein fester Bestandteil der theologischen Bildung aufgenommen und anerkannt. Das bezeugt schon Gregor von Tours: „Wenn du ein Priester Gottes werden willst, so unterrichte dich zuerst unser Martianus in den sieben Wissenschaften.“ Neben Martianus ist es besonders Boëtius (470—525), der zwischen der antiken Geistesbildung und dem christlichen Mittelalter vermittelt. Er hat auch später das allgemein übliche Wort *Quadrivium* geprägt, um den Zusammenhang in der Vierteilung der mathematischen Wissenschaften zu bezeichnen. Cassiodor nennt sie mit einem anderen Bilde die vier Pforten der Wissenschaft. Erhalten sind uns von Boëtius die Schriften über Arithmetik und über Musik. Beide sind als Lehrwerk viel benutzt worden. Die Arithmetik ist eine Nachbildung der Schrift des Nikomachus. Ein Stück des alten pythagoreischen Geistes ist auch in Boëtius noch lebendig. Er beginnt die Arithmetik mit den bezeichnenden Worten: „Bei allen Männern von altem Ansehen, die dem Beispiel des Pythagoras folgend durch reine Geistesbildung hervorgeragt haben, ist es immer als feststehend angesehen worden, daß niemand auf den Gipfel der Vollendung der philosophischen Lehren gelangen könne, der nicht diese Vornehmheit des Wissens auf einem gewissen Kreuzweg (quadrivium) sucht.“ Die Vierteilung begründet er folgendermaßen: Die Dinge der Welt sind entweder diskret oder kontinuierlich. Jene nennt er Mengen (multitudines), diese Größen (magnitudines). Die Mengen werden entweder für sich betrachtet, dann handelt es sich um die Zahlen, oder in Beziehung auf etwas anderes, dann handelt es sich um die Proportionen, mit denen sich die Musik befaßt. Die Größen sind entweder unbewegt, mit diesen hat es die Geometrie zu tun, oder sie sind bewegt, dann bilden sie den Gegenstand der Astronomie.

Die Agrimensoren.

Übergang zum Mittelalter.

Boëtius bildet die Brücke vom Altertum zur Neuzeit. Sein Glaube ist christlich, seine Bildung heidnisch. Er strebt noch nach einer freien Pflege der freien Wissenschaften. Das geistige Leben des untergehenden Griechentums kann nicht als ein Verfall bezeichnet werden, im Gegenteil kann man, wie es Hegel tut, in der Zeit des Neuplatonismus die höchste Blüte des griechischen Geisteslebens erblicken, denn niemals hat der Forschersinn sich tiefer in die tiefsten Rätsel des Daseins versenkt. Die mathematisch-naturwissenschaftliche Forschungsarbeit tritt aber immer mehr zurück.

III. Die mathematische Bildung des früheren Mittelalters.

Der Einfluß des Christentums.

Wenn die neuplatonische Schule noch immer auf dem Boden des alten griechischen Geisteslebens stand und mit diesem Geistesleben die freie ungehinderte Entfaltung der Individualität teilte, so kommt durch das Christentum ein neues Moment auf, das Moment der geistigen Abhängigkeit, der Unterordnung des eigenen Fühlens und Wollens, aber auch der wissenschaftlichen Arbeit unter die Zwecke einer großen religiösen Gemeinschaft. Dadurch kommt auch die Mathematik in eine völlig veränderte Lage. Das ganze Interesse konvergiert nach den Fragen des Glaubens hin, alles andere wird daneben gleichgültig. Der bedeutendste Vertreter der so verwandelten Anschauungen, der an sich den Wechsel von dem geistig und materiell freien Leben der heidnischen Antike zu der demütigen Gläubigkeit des Christentums durchgemacht hat, ist Augustin (354—430 n. Chr.). Wie Augustin die Geometrie verwertet, zeigt die Schrift Über die Quantität der Seele. Es handelt sich um den Nachweis, daß die Seele Dinge wahrnimmt, die sich mit den leiblichen Augen nie sehen lassen. Dafür werden als Beweise die Gebilde der Geometrie, Punkte, Linien, Flächen genommen. Der Einwand, daß sich so etwas wie eine Linie nicht vorstellen lasse, weil auch der dünnste Faden immer noch ein Körper und keine Linie sei, wird damit zurückgewiesen, daß man von den anderen Dimensionen absehen und nur an die Länge denken könne. „Denn es ist unkörperlich, was du jetzt erkennen sollst, die Länge allein kann nur vom Geiste erkannt werden und an einem wirklichen Körper nicht gefunden werden." Aus den Linien sollen nun Figuren gebildet werden. Dazu reichen drei Linien hin, aber vier Linien liefern eine Figur, bei der sich die Seiten und Winkel zu Paaren gegenüberliegender zusammenordnen. Das Quadrat ist deshalb vollkommener als das gleichseitige Dreieck. Aber der Kreis ist noch vollkommener, denn bei ihm hört jede Ungleichheit auf. Der Kreis aber liefert den Punkt durch seinen Mittelpunkt, von dem er überall gleich weit entfernt ist. Der Punkt ist so die höchste Vollendung der geometrischen Abstraktion, er beherrscht alle geometrischen Figuren. Je weiter wir in der Abstraktion fortschreiten, um so höher ist die geistige Vollendung, die Stufe der Erkenntnis, die wir erreichen. Die Geometrie hat die Bedeutung an sich verloren, sie ist nur ein Hilfsmittel der geistigen Vollendung, aber in einem anderen Sinne wie bei Pythagoras und Platon, nämlich nicht durch die wissenschaftliche Be-

Augustin.

schäftigung mit ihr, sondern durch die symbolische Ausdeutung ihrer Formen. So benutzt Augustin die mathematische Erkenntnis als die Vorschule des Geistes für die göttlichen Wahrheiten. Das Gold und Silber, aus dem die heidnischen Götterbilder gefertigt sind, soll der Christ an sich reißen, um es zur Verkündigung des Evangeliums in der rechten Weise zu benutzen.

Mathematikfeindliche Stimmen.

Aber so duldsam wie Augustin dachten keineswegs alle christlichen Kirchenlehrer. Justinus der Märtyrer (2. Jahrh. n. Chr.) sagt, daß, was Wahres an der griechischen Philosophie sei, aus den Schriften der Propheten viel besser erkannt werden könne. Clemens von Alexandrien († 227) nennt sogar die griechischen Philosophen Räuber und Diebe, die, was sie von den hebräischen Propheten entnommen haben, als ihr geistiges Eigentum ausgeben. Tertullian (160—220) sieht in den heidnischen Schriften die Quelle aller Irrlehren. Was hat, ruft er aus, Athen mit Jerusalem zu schaffen, was die Akademie mit der Kirche? Unsere Lehre stammt aus dem Tempel Salomonis, der gelehrt hat, man müsse den Herrn in der Einfalt seines Herzens suchen. Nach Jesus Christus bedürfen wir des Forschens nicht mehr; wo das Evangelium verkündet ist, brauchen wir keine wissenschaftlichen Untersuchungen. Aber während Tertullian wenigstens außerhalb der Glaubenslehre die wissenschaftliche Forschung nicht verdammt, erklärt Isidor von Sevilla († 636) es geradezu für unstatthaft, daß ein Christ sich mit heidnischen Büchern abgebe, weil die weltlichen Wissenschaften, je eifriger sie betrieben werden, einen um so größeren Hochmut in der Seele erwecken.

Cassiodorus.

Dagegen hat Cassiodorus (480—570) in der Schrift De Artibus et Disciplinis liberalium Literarum, in der er die weltlichen Wissenschaften behandelt, ganz im platonischen Sinne das Studium der Mathematik empfohlen, weil sie unsere Begierde von den fleischlichen Dingen ablenkt und uns treibt das zu ersehnen, was wir nicht vor Augen schauen, sondern nur mit Gottes Beistand im Herzen zu erkennen vermögen. Zur Rechtfertigung der Beschäftigung mit der Mathematik führt er die bekannte Stelle Weisheit XI, 21 an: „Du hast alles geordnet nach Maß, Zahl und Gewicht“, von der wir heute wissen, daß sie auf pythagoreischen Einfluß zurückgeht. Es soll auch zur Empfehlung der Mathematik dienen, daß nach Josephus Abraham die Arithmetik und Astronomie nach Ägypten gebracht hat. Mit mehr Berechtigung wird der sachliche Grund angeführt, daß die Arithmetik allein keiner anderen Wissenschaft zu ihrer Begründung bedürfe, aber umgekehrt keine Wissenschaft sie entbehren könne. Was Cassiodorus im übrigen bringt, sind nur Definitionen, und überhaupt glaubte man im ganzen früheren Mittelalter genug getan zu haben, wenn man die mathematischen Begriffe einführte, ohne weiter anzugeben, was man mit ihnen denn anfangen könne. Cassiodorus hat sich aber durch seine organisatorische Tätigkeit ein großes Verdienst um die Pflege und Ausbreitung auch der weltlichen Wissenschaft erworben. Er hob die geistige Bildung der Mönchsorden, und so konnten diese, als sie mit der Mission nach Irland zogen, mit dem Christentum auch die römische Geistesbildung und das römische Schulwesen mitnehmen. Von dort aus hat es sich zugleich mit dem Christen-

tum ausgebreitet. Die Grundlage der geistlichen Erziehung war ein der römischen Schule nachgebildeter Unterricht, und in diesem Unterricht fanden auch die sieben freien Künste ihre allerdings keineswegs unbestrittene Stätte.

Die Lage der Wissenschaften das Mittelalter hindurch ist immer stark durch die politischen und wirtschaftlichen Verhältnisse beeinflußt. In den Zeiten großer Machtentfaltung findet sich auch ein Aufschwung zu höherer Bildung, so unter Karl dem Großen und später unter den Ottonen. Karl der Große gründete eine Art Akademie, zu der er auch Rechenmeister heranzog. Über die Bedeutung der Mathematik für die geistliche Erziehung hat sich klar und deutlich zu Karls des Großen Zeit Rabanus Maurus (776—856) in seiner Schrift über die Ausbildung der Kleriker ausgesprochen. Ihn leitet der alte Platonische Gedanke, daß die Kenntnis dieser Wissenschaften für die Ausbildung des Geistes einen besonderen Wert besitze. Allerdings mutet die Art, wie die Mathematik behandelt werden soll, uns merkwürdig an. Die Definition der Mathematik ist ganz die allgemeine, bis heute noch üblich gebliebene: sie soll die Lehre von der abstrakten Größe sein, und abstrakte Größe ist die von aller materiellen Beimengung losgelöste. Die Mathematik wird genau in der üblichen Weise in Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie eingeteilt. Diese Einteilung entspricht ebenso dem Platonischen Geiste, wie die Bedeutung, die Rabanus der Geometrie in der Ordnung des Weltalls zuschreibt. Danach soll auch alles, was nach festen Regeln wohl angeordnet und aufgebaut ist, die Anwendung geometrischer Regeln gestatten. Aber seltsam berührt es uns zunächst, wenn die Kenntnis der Arithmetik dazu dienen soll, die in der Heiligen Schrift enthaltenen Zahlen richtig zu deuten und zu verstehen. Freilich ist dies von der Auffassung der Neuplatoniker wenig verschieden.

Rabanus Maurus.

Zustand des mathematischen Unterrichts im frühen Mittelalter.

Im allgemeinen blieb die Aufnahme der Mathematik in die geistliche Bildung während des frühen Mittelalters nur eine ideale Forderung. Der Unterricht in ihr war mehr als kümmerlich. Den ganzen Schulunterricht dieser Zeit müssen wir so auffassen, daß die dem Zustand der Unkultur kaum entwachsenen Germanen allmählich der Gesittung gewonnen werden mußten. Die antike Kultur war unter dem Ansturm der barbarischen Völker müde in sich zusammengebrochen. Die Völker, welche im Altertum die Führung hatten, waren in ihrer Lebenskraft erschöpft und entartet. So mußte erst nach und nach die Bildung verbreitet werden, und das zeigt sich auch im mathematischen Unterricht. Die Hauptsache blieb das gewöhnliche Rechnen an den Fingern. Erst gegen Ende des ersten Jahrtausends nach Christus kommt das Rechenbrett, der Abakus, auf. Ohne diesen bedeutete in dem römischen Ziffernsystem auch die einfachste Division eine große Arbeit und eine schwierige Aufgabe. Als Beispiel möge man eine Stelle unter Bedas Werken (Migne, Patrologie XC, p. 719) vergleichen, wo die Zahl 6152 mit fürchterlicher Umständlichkeit durch 15 dividiert wird. Was an Geometrie gelehrt wurde, bestand vielfach darin, daß das sechste Buch von Martianus Capellas Enzyklo-

pädie gelesen wurde, wo nach der Erdbeschreibung auch die geometrische Terminologie erklärt wird. Die Geometrie wurde überhaupt, in einer unklaren Ausdeutung ihres Zusammenhanges mit der Feldmessung, mit der Geographie zusammengeworfen. Mit ihrer Hilfe sollte man die klimatischen Verhältnisse der Orte auf der Erde kennen lernen und danach die Vorschriften für die Behandlung von Krankheiten richten können! Nach Notker dem Stammler (840 bis 912) besteht das Quadrivium darin, über die Lage der Gegenden, den wechselnden Lauf der Planeten, den wunderbaren Einfluß der Gestirne und die für uns unsichtbaren Dinge oberhalb des Himmels Aufschluß zu geben. Honorius von Augustodunum sagt von dem Geometrieunterricht, es werde darin die Weltkarte ausgebreitet und die Lage der Länder mit Bergen, Flüssen und Städten gezeigt. Die Rechenkunst wurde in Zusammenfassung mit der Astronomie hauptsächlich für die kirchliche Zeitrechnung gebraucht. Diese sollte, wie schon das Capitulare von 789 fordert, jeder Geistliche beherrschen. Lehrbücher dieses Computus gab es sehr zahlreiche, so von Beda, Alcuin, Rabanus, Hermann dem Lahmen und anderen mehr. Helperich sagt im 11. Jahrhundert, nicht einmal der Laie, geschweige denn der Geistliche könne diese Kunst entbehren.

Nach einem lateinischen Gedicht des Walter von Speier aus dem Jahre 983, in dem er seine eigene Ausbildung in Sankt Gallen schildert, wäre damals schon das Rechnen auf dem Abakus durchgenommen worden, in der Geometrie werden die Dreiecke samt den Vierecken und Fünfecken behandelt und mit diesen zu Pyramiden verbunden. Das ist genau die Art, wie die Geometrie in Boëtius' Arithmetik erscheint als Vorbereitung zu der Lehre von den figurierten Zahlen. Es hat wohl diese Schrift in gewissem Sinne die Grundlage des mathematischen Unterrichts gebildet. Weiter aber wird auch die Feldmessung in der Art der römischen Agrimensoren erwähnt, es scheint daher wirklich ein Unterricht in der praktischen Geometrie, wohl wesentlich in Rücksicht auf die faktischen Bedürfnisse, an Hand der alten Schriften oder von Neubearbeitungen erteilt worden zu sein.

Übungsaufgaben.

Im übrigen wurden auf gut eingerichteten Schulen im mathematischen Unterricht eine Menge von Aufgaben behandelt, deren Ursprung wir schon in ganz früher Zeit bei den alten Ägyptern finden und die von den römischen Schulen auf das mittelalterliche Bildungswesen übergehen. Sammlungen von solchen Aufgaben sind z. B. unter dem Namen des Beda und des Alcuin erhalten. Schon in der Überschrift dieser Sammlungen wird angedeutet, daß sie keinen praktischen Wert besitzen sollen, sondern nur bestimmt sind, „den Geist der jungen Leute zu schärfen“. Darunter sind die alten Aufgaben von den geometrischen Progressionen zu finden, wie die mit den Tauben, von denen auf der ersten Stufe einer Leiter eine, auf der zweiten Stufe zwei, auf der dritten Stufe vier, auf der vierten acht usw. sitzen. Es finden sich auch Aufgaben für die Geometrie, wie die Frage nach der Anzahl rechteckiger Häuser von bestimmter Form und Größe, die in einer kreisrunden Stadt von gegebener Ausdehnung Platz haben.

Widerstand gegen die Mathematik.

Daß die Mathematik trotz aller solchen Mittel, sie schmackhaft und verdaulich zu machen, im frühen Mittelalter viel Verständnis und Entgegenkommen gefunden hätte, können wir nicht behaupten. Sie wurde immer als etwas Schwieriges und Unangenehmes angesehen. Ein Lehrer aus dem 8. Jahrhundert schreibt, daß sich ihm schon beim Gedanken an die Mathematik der Hals zuschnüre; die sprachlichen Fächer seien Kinderspiel dagegen. Allmählich scheint sich eine gewisse Differenzierung eingebürgert zu haben, indem sich mit der Mathematik diejenigen beschäftigten, die eine besondere Neigung dafür hatten. Damit steht denn auch ein erneutes Aufblühen der Mathematik gegen die Wende des Jahrtausends im Zusammenhang. Die erste geometrische Lehrschrift des Mittelalters ist unter dem Namen des Boetius überliefert. Der Verfasser erklärt im Vorwort, daß sein Zweck gewesen sei, das Verständnis der Geometrie zu erleichtern. Sein Verfahren besteht darin, daß er die Euklidischen Lehrsätze zusammenstellt, ohne die Beweise hinzuzufügen, die offenbar weder er verstanden hat noch seine Leser verstanden haben würden. Dann werden wahllose Auszüge aus den römischen Feldmessern angereiht. Das Ganze ist eine wüste Kompilation. Etwas besser steht es schon mit der Geometrie des Gerbert († 1003). Von ihm wird auch ausdrücklich erzählt, daß er in der Mathematik nur die dazu Befähigten unterwiesen habe (Richeri Histor. III, 49).

Die Wissenschaft als heidnisch verrufen.

Der Beschäftigung mit der Mathematik stand dabei nicht bloß mangelndes Verständnis entgegen, sondern auch die Abneigung gegen die heidnische Wissenschaft. Der Geistliche sollte sich nicht mit diesen Dingen beschäftigen, die seine Seele auf Irrwege lockten. Der Abt Wilhelm von Hirsau erzählt im 11. Jahrhundert in der Vorrede seines astronomischen Lehrwerkes, wie ihn sein Gewissen beunruhigt habe, daß er sich mit solchen Dingen abgäbe, da habe ihn ein Freund getröstet und ihm gesagt, es sei Pflicht jedes Menschen, die Fähigkeiten, die Gott ihm eingepflanzt, nach Kräften zu pflegen und zum gemeinen Besten zu verwerten.

Die Musik.

Die wirklich selbständige und nutzbringende Ausgestaltung des Quadriviums liegt nicht auf mathematischem Gebiet. Sie betrifft neben der Zeitrechnung die Musik, die ursprünglich nur als die Lehre von den Zahlenverhältnissen der musikalischen Harmonien gedacht war, die nun aber den liturgischen Zwecken zuliebe gepflegt und so ins Praktische übertragen wurde. Musik und Chronologie hatten eben ein unmittelbares kirchliches Interesse und gehörten damit zur eigentlichen geistlichen Ausbildung. Man muß immer im Auge behalten, daß die wissenschaftliche Bildung in jenen Zeiten auf die Geistlichkeit beschränkt und damit ihrem Wesen nach Theologie war.

Das Buchwissen den Geistlichen vorbehalten.

Das Buchwissen war im Mittelalter der Geistlichkeit durchaus eigentümlich. „Der Pfaffe sehe die Schrift an; so soll der ungelehrte Mann die Bilder sehen, da ihm nicht die Schrift zu erkennen geschicht“ sagt Thomasin von Zirkläre im Welschen Gast. Die Beschäftigung des Laien hielt man für unvereinbar mit gelehrten Studien. „Wer danach strebt, Haus, Vieh und Grundbesitz zu erwerben oder ein Weib zu nehmen, der hat nicht den rechten Sinn für das

Studium", sagt der Diakon Amalarius. Daß ein Ritter Lesen und Schreiben kann, ist eine Ausnahme. Hartmann von Aue rühmt sich in den ersten Versen des Armen Heinrich ausdrücklich, daß er es gelernt hat. Reiten, Springen, Speerwerfen, Jagen, das sind die Bestandteile der ritterlichen Bildung, dazu vielleicht noch Schach spielen, die Laute schlagen und Verse machen. Nur in den Zeiten großen Aufblühens ist auch eine Schulbildung der vornehmen Laien erstrebt worden. Wirkliche Laienschulen kommen aber erst mit den Städten auf. Zuerst sind sie an die Kirchen gebunden, dann werden sie auch von den städtischen Gemeinden errichtet. Das geschah bereits im 13. Jahrhundert. In der Kölner Diözese findet sich damals sogar schon ein Beispiel von Schulzwang. Der Gegenstand des Unterrichtes ist Lesen, Schreiben, Religion und Gesang. Von Rechenunterricht ist noch keine Rede. Das Rechnen ist, wo es in Betracht kommt, ein Teil der kaufmännischen Fachbildung.

Entwicklung der Laienschulen.

IV. Die mathematische Bildung in der Zeit des Scholastizismus.

Wendung zum Besseren.

Der Tiefstand des mathematischen Wissens im frühen Mittelalter hebt sich rasch mit dem Emporkommen der geistigen Kultur, das sich an den im 13. Jahrhundert aufblühenden Scholastizismus knüpft. Der Scholastizismus entstand durch das Bekanntwerden des Aristoteles aus den arabischen Quellen. Die Araber übernehmen die Mission, das Erbe des Altertums nach einem Jahrtausend dem germanisch-romanischen Völkerkreis weiterzugeben, nicht unvermehrt durch eigene Untersuchungen und mit einem Einschlag, der von den auf der alten Kultur weiterbauenden Indern herrührt und der an die Araber durch ihre weitausgedehnten Handelsbeziehungen nach dem Morgenlande hin kam. Es sind keineswegs bloß die Schriften des Aristoteles, die vom Abendland aufgenommen wurden, mit ihm wurden auch andere Schriften, besonders mathematische Werke der Griechen und der Araber selbst, erschlossen. So wurden die Elemente des Euklid schon zu Anfang des 12. Jahrhunderts von einem englischen Mönche, Adelhart von Bath, aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Fast gleichzeitig wurde auch das wichtigste mathematische Werk der Araber, das den Titel führt Algebr w'Almukabala, Wiederherstellung und Gegenüberstellung, und dessen Verfasser Muhammed ibn Musa Alchwarismî (etwa 800 n. Chr.) ist, vielleicht von demselben Adelhart, übersetzt. Von diesem Werk stammt die Bezeichnung Algebra; aus dem verstümmelten Namen des Verfassers Alchwarismî ist die Bezeichnung Algorithmus für die arabische Rechenmethode, die später auf jedes bestimmte Rechenverfahren übertragen wurde, entstanden. Die Euklidübersetzung des Adelhart ist aber weder ohne Vorgänger, denn wenigstens teilweise ist Euklid schon vorher lateinisch herausgegeben worden, noch hat sie für den Unterricht besondere Bedeutung erlangt. Dies gilt viel mehr für die anderthalb Jahrhunderte später erschienene Übersetzung des Johannes Campanus, die eben in eine Zeit fiel, wo das Verständnis für die Mathematik schon weiter fortgeschritten war. Für die Mathematik ist neben der allgemeinen geistigen Entwicklung auch das Fortschreiten der materiellen Kultur, das sich an das Emporblühen des

Euklid-übersetzungen.

überseeischen Handels und die wirtschaftliche Verbindung des Abendlandes mit dem Orient knüpft, von entscheidender Bedeutung gewesen. Daß durch das Bekanntwerden der arabischen Sprache und Literatur alles erschlossen wurde, was die Araber auf wissenschaftlichem Gebiete geleistet hatten, und dabei die Mathematik eine bedeutende Rolle spielte, war nicht alles; es stellte auch die Ausbildung der Handelsbeziehungen ihre Anforderungen an das kaufmännische Verrechnungswesen, ohne das eine geordnete Führung ausgebreiteter kaufmännischer Geschäfte unmöglich ist. Durch eine eigentümlich glückliche Fügung trifft das Bekanntwerden der arabischen Ziffern mit dem Aufblühen des Handels zusammen und daraus erwuchs die Möglichkeit eines ungeheuer vereinfachten Verrechnungswesens.

Lionardo Pisano.

Die Entwicklung des mathematischen Wissens, das so entstanden ist, liegt uns deutlich vor Augen in den Werken eines Mannes, der in der glänzenden Zeit des Kaisers Friedrichs II. und nicht außer Verbindung mit den gelehrten Kreisen des kaiserlichen Hofes gelebt hat. Es ist dies Lionardo Fibonacci, auch nach seiner Vaterstadt Pisa Lionardo Pisano genannt. Lionardo war ein so großer Geist, daß er die ganze Tradition in sich aufzunehmen und selbständig zu verarbeiten vermochte. Was in seinen Schriften enthalten ist, teils aus fremden, meist arabischen Quellen, teils an eigenen Forschungen, geht so weit, daß die ganze mathematische Entwicklung der nächsten vier Jahrhunderte darin vorgebildet liegt. Es ist also wenigstens für die Mathematik durchaus nicht richtig, daß erst die Renaissance einen Aufstieg hervorgerufen hat; die Renaissance beruht vielmehr, was bildende Künste und Naturwissenschaften anbetrifft, zu einem großen Teil auf der voraufgegangenen Entwicklung des mathematischen Wissens.

Wir finden bei Lionardo fast alles das, was bis auf den heutigen Tag den Gegenstand des arithmetischen Schulunterrichtes ausmacht, und das wird wohl kein zufälliges Zusammentreffen sein, vielmehr zieht sich eine fortlaufende Entwicklung von ihm zu unseren Schulen hin. Lionardo beginnt seinen Liber Abaci, der zuerst im Jahre 1202 und in neuer Bearbeitung 1228 entstanden ist, mit den arabischen Zahlen und einer Erinnerung an das bis dahin übliche Finger- und Abakusrechnen, dann kommen die vier Grundrechnungsarten ganz wie bei uns und eine voll ausgebildete Bruchrechnung. Daran schließt sich das kaufmännische Rechnen in der Form, wie es sich seither erhalten hat, auch die Ausdrücke Kettensatz, Mischungsrechnung, Gesellschaftsrechnung, Warenrechnung, die sich immer noch in unseren Lehrbüchern finden, gehen auf Lionardo zurück. Daneben steht die arabische Algebra, voll ausgebildet sind die quadratischen Gleichungen, ein erster Versuch findet sich auch für die kubischen Gleichungen.

Wie sehr Lionardo auf arabischen Quellen fußt, geht aus seinen eigenen Worten und den Benennungen, die er gebraucht, hervor. Aber durch die arabische Überlieferung hindurch haben sich viel ältere Traditionen erhalten, nämlich besonders ägyptische Kenntnisse. Dies zeigt sich an der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in eine Summe von Stammbrüchen, die Lionardo

besonders behandelt, an der Methode des falschen Ansatzes, die sich schon in den ägyptischen Papyri zwei Jahrtausende v. Chr. findet und von den Arabern zu dem doppelten falschen Ansatz, der Regula alchatayn nach Lionardos Benennung, erweitert worden ist; auch die Behandlung der arithmetischen und geometrischen Reihen weist sogar im Wortlaut der behandelten Aufgaben auf die Ägypter zurück. Aus dem alten Ägypten stammen auch in letzter Linie die rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Verhältnissen der Seitenlängen und die sogenannte Heronische Dreiecksformel, für die Lionardo einen etwas anderen Beweis wie Heron gibt. Auch das angenäherte Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, das sich bei Lionardo findet, rührt von den alten Ägyptern her. Diese Tatsache, daß die Ägypter, die schon die griechische Mathematik bestimmend beeinflußt hatten, noch einmal durch die Araber hindurch auf die neuzeitliche Mathematik einwirken, ist äußerst merkwürdig. Die einzig mögliche Erklärung scheint mir die, daß bei der Eroberung Alexandrias durch die Araber die alte ägyptische Geistesbildung, die selbst die griechischen Kultureinflüsse überdauert hatte, doch nicht spurlos unterging, sondern bei den Eroberern eine neue Heimstätte fand.

Andere mathematische Schriftsteller.

Neben Lionardo ist sein Zeitgenosse Jordanus Nemorarius als ein Neubegründer der mathematischen Wissenschaft anzusehen. Von ihm stammt die Bezeichnung allgemeiner Zahlen durch Buchstaben, welche die Grundlage der modernen mathematischen Formelsprache gebildet hat. Er schrieb auf Grund einer arabischen Quelle ein Buch Über die Dreiecke, das zum erstenmal dem Abendland eine bedeutsame Fortführung der Geometrie bot. Die Behandlung mehrerer quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten in den leicht auflösbaren Fällen, die im neueren Mathematikunterricht eine große Rolle spielt, hat Jordanus in einer Schrift über die gegebenen Zahlen (De numeris datis) entwickelt. Er hat aber auch durch sein Buch Über die Gewichte die erste, allerdings noch unvollkommene Grundlage der modernen Mechanik geliefert. Hier war bekanntlich der Punkt, wo die Griechen scheiterten; die Begründung einer wissenschaftlichen Mechanik ist ihnen nicht geglückt, sie sind über das Archimedische Hebelgesetz nicht hinausgelangt. Erst dem späteren Mittelalter war es vergönnt, aus dem Hebelgesetz die allgemeine Regel der Statik, die wir als Parallelogramm der Kräfte bezeichnen, abzuleiten. Im 13. Jahrhundert entstanden auch die Lehrbücher, welche die antike angewandte Mathematik den Bedürfnissen der Zeit anpaßten, so vor allem die Sphaera des John of Holywood (Johannes de Sacrobosco), die ungeheuer verbreitet war und sogar im 14. Jahrhundert von Konrad von Megenberg deutsch bearbeitet wurde, ferner gegen Ende des 13. Jahrhunderts die Optik des Witelo, die die griechische Perspektive nach arabischer Überlieferung wieder erneuert. Zeichen des erwachenden mathematischen Interesses sind auch die Übersetzungen griechischer Texte. Neben der bereits genannten Euklidübersetzung des Campanus sind die Übersetzungen anzuführen, die, wie es heißt, auf Wunsch des Thomas von Aquino († 1274) Wilhelm von Mörbecke von der Heronischen Katoptrik und den Archimedischen Schriften anfertigte. Durch

diese Übersetzung ist uns die Schrift des Archimedes über die Hydrostatik erhalten geblieben.

Aufkommen der scholastischen Mathematik.

Eine besondere Art scholastischer Mathematik hat sich aus der Philosophie des Duns Scotus, vielleicht des kühnsten und schärfsten Denkers des Mittelalters, entwickelt. Dieser hatte für das, was Gegenstand der Sinneswahrnehmung wird, den Ausdruck Forma geprägt. Hart und weich, schnell und langsam, hell und dunkel, warm und kalt sind solche Formae. Diese Formen sind nun einer Zu- und Abnahme fähig, und die methodische Untersuchung dieser Veränderungen, der „intensiones et remissiones formarum“, bilden einen wichtigen Gegenstand der scholastischen Mathematik. Ihre Ausbildung erhielt sie in der Lehre von den „latitudines formarum“, die wir bei Nicole Oresme († 1382) finden und die durch die geometrische Gewandung, in der sie auftritt, den modernen Koordinatenbegriff als die Grundlage der allgemeinen graphischen Darstellung irgendwelcher Funktion geschaffen hat. Fermat und Descartes haben später dieses Verfahren zu einer systematischen Behandlung der ganzen Geometrie ausgebaut, wodurch vielfach die Meinung entstanden ist, daß er auch den Koordinatenbegriff erst gefunden habe.

In der Lehre von den Latitudines formarum steckt aber gleichzeitig auch der erste Anfang der späteren Differentialrechnung, ebenso wie wir die erste Quelle der Integralrechnung oder vielmehr der Form der Infinitesimalrechnung, die wir als Indivisibelnlehre bezeichnen, schon im 13. Jahrhundert in den Untersuchungen des Thomas Bradwardinus über den Unendlichkeitsbegriff finden. Es ist die alte griechische Unendlichkeitslehre, aber in einer abgeklärten Form, die uns hier begegnet.

Mathematischer Unterricht an den Universitäten.

Der rasche Aufschwung des mathematischen Wissens im 13. Jahrhundert, bei dem nur der Geist des Scholastizismus es bedingte, daß der Hauptwert auf die Bildung der Begriffe, nicht die wirkliche Ausführung der Operationen gelegt wurde, bringt den Gedanken nahe, daß die Mathematik auch im Unterricht zu dieser Zeit eine bedeutende Rolle zu spielen begonnen habe. Inwieweit dies der Fall gewesen ist, können wir nicht mit Sicherheit feststellen. Um die Mitte des 13. Jahrhunderts klagt Roger Bacon, die Pariser Universität kümmere sich wenig um fremde Sprachen und ebensowenig um Mathematik, Perspektive, Moralwissenschaft und Alchymie. Indessen scheint das Quadrivium auch an den mittelalterlichen Universitäten eine Behandlung erfahren zu haben. In der Grabschrift des 1199 in Paris verstorbenen Hugo Physicus wird ausdrücklich des von ihm im Quadrivium erteilten Unterrichts gedacht. Dagegen scheint der allgemeine arithmetische Unterricht erst etwas später aufgekommen zu sein, nachdem er bereits in dem Unterricht der Kaufleute eine dominierende Stellung eingenommen hatte. In seiner fachlichen Bedeutung ist das Rechnen sehr bald anerkannt worden, die ganze fachliche Ausbildung des Kaufmanns wurde sogar in den Begriff der Arithmetik zusammengefaßt, und in gewissem Sinne ist das sehr lange so geblieben, das Rechnen galt als eine kaufmännische Spezialwissenschaft. Aber die große Bedeutung,

welche der Handel überhaupt erlangte, brachte die Arithmetik auch an die Universitäten. Es wurden regelmäßige Vorlesungen über die einzelnen Teile der Arithmetik eingeführt. Die scholastische Arithmetik unterschied neun Prozesse: Zählen, Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren, Multiplizieren, Dividieren, Progression und Radizieren. Im 14. Jahrhundert erlebte die Mathematik an der Pariser Universität eine kurze Glanzzeit, es war die Zeit, wo Oresme dort wirkte. Der Wiener Vorlesungsplan vom Ende des 14. Jahrhunderts zählt an mathematischen Vorlesungen auf: Sphaera materialis, Arithmetica, Proportiones breves, Latitudines formarum, Euclides, Arithmetica et proportiones, Perspectiva, Musica, Algorithmus de integris, Theorica planetarum, Computus physicus (Rechnen mit Brüchen, deren Nenner Potenzen von 60 sind), Algorithmus de minutiis (gewöhnliche Bruchrechnung). Johann von Gmunden war 1420 der erste mathematische Fachprofessor in Wien, er schrieb einen Tractatus de minutiis physicis, anscheinend als Grundlage für Universitätsvorlesungen, im übrigen wurden Euklid, Oresme, Witelo, Sacrobosco und für die Arithmetik ein Lehrbuch des Johannes de Muris benutzt. In Padua wurde während des 15. Jahrhunderts die Mathematik mit der Astronomie zusammen gut gepflegt. Es wirkten dort Prosdocimo dei Beldomandi, Pietro d'Abana, Guglielmo di Montorso, Giovanni Dondi und Biagio da Parma. In Bologna erscheint im Jahre 1383 ein eigener Lehrer der Arithmetik; gegen Ende des 15. Jahrhunderts bestanden zwei Professuren der Mathematik, die eine für Astronomie, die andere für Arithmetik und Geometrie. Es wirkten dort Domenico Maria von Ferrara, Scipio von Mantua, Scipione dal Ferro (in den Jahren 1496—1526), der als Entdecker der Lösung der Gleichungen dritten Grades berühmt geworden ist, endlich, aber nur vorübergehend, der vielgewanderte Luca Paciuolo (1448—1514). Luca Paciuolo hat ein Buch De divina proportione geschrieben, das im Zusammenarbeiten mit Lionardo da Vinci entstanden ist und die Mathematik in eine enge Beziehung zur bildenden Kunst bringt. Das alte Verhältnis des goldenen Schnittes wird zur Erklärung und Begründung der Schönheit verwendet. Daraufhin werden auch die Verhältnisse des menschlichen Körpers untersucht, ebenso wird die Herstellung schöner Buchstaben auf Grund geometrischer Konstruktion erstrebt.

V. Die mathematische Bildung der Renaissance.

Die künstlerische Mathematik.

Luca Paciuolo gehört schon einer neuen Zeit an, die eben durch das Vordringen des künstlerischen Interesses gekennzeichnet ist. Es ist die Zeit der Renaissance. Luca Paciuolo ist im eigentlichen Sinne der Mathematiker der Renaissance. Durch ihn tritt die offizielle Mathematik der Universitäten zum erstenmal in enge Beziehung zu einer andersgearteten Mathematik, die sich unabhängig von dem Lehrbetrieb ausgebildet und fortgepflanzt hat und bedeutender ist als die Mathematik, die in der Artistenfakultät der Universitäten sich oft mühsam behauptete und bei der die wirkliche sachliche Belehrung vielfach in einem Schwall von Reden über die einfachsten Dinge erstickte. Es ist dies die praktische Mathematik der Baumeister und Maler.

Unter den mittelalterlichen Baumeistern bildete sich die aus dem Altertum überkommene technische Geometrie immer mehr in selbständiger Weise zu einer Rißkunst aus, die eine Fülle geometrischer Konstruktionen umfaßte. Ihren Ausgangspunkt bildet die altbabylonische, auch in Ägypten gekannte Konstruktion des regulären Sechsecks; diese fällt mit der Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks, mit der Euklid seine Elemente beginnt, wesentlich zusammen. Die mannigfaltige Ausgestaltung dieser Konstruktion können wir an den gotischen Bauwerken überall erkennen; auf sie suchte man nach Möglichkeit alle anderen Konstruktionen zurückzuführen. Das Verfahren war ein bloßes Probieren. Zwischen genauer und angenäherter Richtigkeit einer Konstruktion wurde nicht unterschieden. Was in praktischer Hinsicht genügte, befriedigte vollkommen. Der Beweis spielt gar keine Rolle. Es handelt sich nur darum, wie es gemacht wird, nicht, wie es zu begründen ist, aber der Schatz an praktischen Kenntnissen ist außerordentlich reich. Diese Kenntnisse wurden jedoch keineswegs bereitwillig mitgeteilt, sondern in den Bauhütten als Zunftgeheimnis streng gehütet und nur in fest geordnetem Lehrgang nach langer Probezeit dem Lehrling eröffnet; sie treten literarisch erst nach der Erfindung der Buchdruckerkunst in die Erscheinung, zuerst in ein paar ganz kurzen Abrissen dieser Steinmetzgeometrie und dann ausführlicher in dem viel bekannter gewordenen Buche unseres Albrecht Dürer, Unterweisung der Messung mit Zirkel und Richtscheit (1525). Auch vieles, was sich in den Manuskripten Lionardos da Vinci an geometrischen Konstruktionen findet, geht auf die Zeit der Gotik zurück.

Die Perspektive.

Inzwischen hatte sich aber noch ein anderer Zweig des mathematischen Wissens entwickelt, der insbesondere die Maler berührte: die Perspektive. Nach dem Zeugnis der Zeitgenossen ist es Brunellesco (1379—1446) gewesen, der am Anfang des 15. Jahrhunderts ihre Regeln fand. Im Jahre 1414 war von Poggio Bracciolini in der Klosterbibliothek von St. Gallen eine Handschrift des Vitruv gefunden worden. Diese authentische Nachricht von der Bauweise der Alten übte auf die Renaissancezeit den größten Einfluß aus. So soll auch eine kurze Bemerkung, die sich bei Vitruv über die antike Perspektive findet, Brunellesco den Anlaß zu seiner Entdeckung gegeben haben, jedoch ist das zweifelhaft. Jedenfalls ist er nicht bei dem Zusammenlaufen der Linien nach dem Horizonte hin, das Vitruv allein anführt, stehengeblieben, sondern hat selbständig die richtige Bemessung der Tiefe in dem Bilde gefunden. Er zeigte die Bedeutung seiner Entdeckung, indem er seinen Freunden eine genau perspektivisch konstruierte Ansicht des Platzes der Signoria in Florenz in einer Art Guckkasten vorwies, wobei er zur Erhöhung der Illusion die vorüberziehenden Wolken sich in einer silbernen Fläche über den Häusern des Bildes spiegeln ließ. Die täuschende Wiedergabe der Wirklichkeit, die er so erreichte, erregte nicht ohne Grund allgemeines Erstaunen, und die neue Kunst fand sehr rasch Verbreitung. Man sieht es an den Bronzetüren des Baptisteriums in Florenz, die von Ghiberti, einem Zeitgenossen Brunellescos, herrühren. Das erste Bild verrät noch keine perspektivischen Kenntnisse, das

zweite zeigt sie bereits in hoher Vollendung. Von den Malern wandte die neuentdeckte Perspektive zuerst Masaccio an, den Brunellesco selbst sie lehrte, und Paolo Uccello, der unter anderem einen Kreisring mit unsäglicher Mühe richtig perspektivisch konstruierte und in seinem Gemälde der Sintflut anbrachte. Darauf verbreitete sich die neue Malweise so sehr unter allen Künstlern, daß die Maler geradezu Perspektiviker, Prospettivi, genannt wurden.

Für die enge Beziehung, in der sich die Künstler der Renaissance zur Mathematik fühlten, gibt es ein eigentümliches, aber beredtes Zeugnis. In seiner Schule von Athen hat Raffael auch die Mathematik berücksichtigt. In dem Tempel der Wissenschaft haben, ganz im Sinne der Renaissance, Platon und Aristoteles den ersten Platz: die Philosophie ist die Herrscherin und Führerin. Die Gruppe der Mathematiker nimmt eine bescheidene Stelle vor dem Tempel ein. Aber in dieser schönen Gruppe, welche die Versenkung in die Freude des Forschens und Findens mit hoher Vollendung darstellt, hat Raffael nicht bloß den Baumeister Bramante, sondern auch sich selbst angebracht. Durch ihre Begründung auf den Regeln der Perspektive erschien die Malerei selbst als eine mathematische Kunst. Albrecht Dürer sagt in der Vorrede zu seiner Unterweisung der Messung mit Zirkel und Richtscheit (1525) im Hinblick auf die hinter der italienischen Kunst zurückgebliebene deutsche Malerei: „Wiewohl etliche Fertigkeit nur eine freie Hand verlangt, so daß sie ihr Werk gewaltig, aber unbedacht und allein nach ihrem Gutdünken gemacht haben, so mußten doch die verständigen Maler und rechten Künstler beim Anblick solcher Werke dieser Leute ihre Blindheit belachen, weil einem rechten Verstand nichts unangenehmer auffällt denn Falschheit im Gemälde, unangesehen ob das auch mit allem Fleiß gemalt wird. Daß aber solche Maler an ihren Irrtümern Wohlgefallen gehabt, rührt davon her, daß sie die Kunst der Messung nicht gelernt, ohne die kein rechter Werkmann werden oder sein kann.“

Die Perspektive nimmt in der mathematischen Literatur des 16. Jahrhunderts einen hervorragenden Platz ein, ja sie bedeutet vielleicht das Gebiet, auf dem diese Zeit sich in mathematischer Hinsicht am fruchtbarsten erwiesen hat. Der erste, der über sie geschrieben hat, ist Leo Battista Alberti (1404—1472), der sie schon vor 1444 in seiner Schrift De Statua, wohl wesentlich in derselben Weise wie Brunellesco sie gefunden hatte, behandelte. Das erste wirkliche Lehrbuch der Perspektive schrieb gegen Ende des 15. Jahrhunderts der Maler Piero della Francesca (1420—1492). Das erste gedruckte Werk über Perspektive erschien 1505 in Toul, sein Verfasser ist der Franzose Viator oder Pêlerin. Es besteht in der Hauptsache aus vortrefflichen und sehr anschaulichen Figurentafeln. Von da an sind die Lehrbücher der Perspektive sehr zahlreich. Eines der ausgezeichnetsten aus der Zeit der Hochrenaissance ist Daniele Barbaros Prattica della Perspettiva (1569). Hier spielt auch schon die Theaterperspektive eine Rolle. Guido Ubaldo del Monte, der Gönner und Freund Galileis, brachte 1600 einen gewissen Abschluß in die Begründung der Perspektive, indem er die Bedeutung der Fluchtpunkte allgemein erkannte.

Die Perspektive hat das große Verdienst, daß sie nicht bloß der modernen

Kunst, sondern auch der modernen Geometrie die Bahnen eröffnet hat. Sie lehrte in einer Zeit, in der das Verständnis für die Feinheiten der griechischen Geometrie noch kaum wieder erwacht war, die räumlichen Gebilde von einer neuen Seite ansehen; diese Betrachtungsweise hat in dem, was wir heute als projektive Geometrie bezeichnen, ihre unmittelbare Fortsetzung gefunden. Aber noch in einer anderen Hinsicht ist das 16. Jahrhundert für die moderne Mathematik grundlegend gewesen, nämlich in der Entwicklung der Algebra und der modernen mathematischen Formelsprache. Die Gleichungen zweiten Grades, die schon die Griechen in geometrischer Einkleidung behandelt hatten, sind bereits von Lionardo Pisano auf Grund der arabischen Vorbilder erledigt worden. Am Anfang des 16. Jahrhunderts fand nun Scipione del Ferro auch die allgemeine Lösung der Gleichungen dritten Grades, etwa im Jahre 1543 gelang endlich dem kaum zwanzigjährigen Luigi Ferrari, einem Schüler Cardanos, die Auflösung der Gleichungen vierten Grades, indem er zeigte, wie diese sich auf eine Gleichung dritten Grades, die sogenannte kubische Resolvente, zurückführen läßt. Damit war ein gewaltiger Fortschritt erreicht und die Algebra bis zu den Grenzen entwickelt, die ihr im Schulunterricht heute noch gezogen sind. Was aber noch fehlte und erst bei Fermat und Descartes in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts voll entwickelt auftritt, ist die algebraische Formelsprache, die den umständlichen und unübersichtlichen Wortausdruck in eine Art Kurzschrift zu übersetzen gestattet. Wie diese Formelsprache entstanden ist, davon können folgende kurze Daten einen Begriff geben: 1489 verwendete Widmann die Zeichen + und − für die Addition und Subtraktion. Das Gleichheitszeichen = hat ein Engländer, Recorde, erfunden, der es 1556 in einem algebraischen Lehrbuch Der Wetzstein des Witzes einführte, weil nichts gleicher sei als diese zwei Strichelchen. Die Angabe der Multiplikation durch einfaches Nebeneinanderstellen der zu multiplizierenden Größen, ebenso wie die Angabe der Division durch den Bruchstrich finden sich schon 1202 bei Lionardo Pisano. Dagegen ist das Zeichen $\times$ erst 1631 durch den Engländer Oughtred eingeführt worden und das Zeichen : 1684 durch Leibniz. Der Haken $\sqrt{}$ für die Quadratwurzel findet sich zuerst 1524 bei Adam Riese. In der Rudolffschen Coß vom Jahre 1525 begegnet uns zuerst das Zeichen für die Unbekannte in einer Gleichung, das später einfach als ein x geschrieben worden ist. Der Franzose Vieta hat endlich 1591 die konsequente Verwendung von Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlengrößen in Verbindung mit Operationszeichen, sowie den Zusammenschluß durch verschieden gestaltete Klammern und damit die moderne Formelschreibweise eingeführt.

Entwicklung der Algebra.

Entstehung der algebraischen Formelsprache.

Die Trigonometrie.

Vieta ist es gleichzeitig, der sich das größte Verdienst für die Entwicklung der modernen Trigonometrie erworben hat. Diese wird gewöhnlich auf Regiomontanus (1436—1476) zurückgeführt, der sie in der Schrift De triangulis omnimodis libri V niedergelegt hatte. Diese Schrift erschien im Druck erst 1533, 57 Jahre nach dem Tode des Verfassers. Die späteren Trigonometer sahen sie für eine selbständige Schöpfung Regiomontans an und ergingen sich deshalb in Lobeserhebungen über ihn. Untersucht man aber, was wirklich

an dem Werke eigene Leistung ist, so fällt manches weg. Der Ruhm, den Regiomontan geerntet hat, beruht zum Teil darauf, daß seine handschriftlichen Quellen, die Schrift des Menelaus und die Werke der Araber Levi ben Gerson, Al Battani und Dschabir vergessen waren und er sie nicht nennt. Dagegen hat Vieta (1450—1603) eine unleugbar selbständige Leistung vollbracht, ihm verdanken wir die systematische Ausbildung der Methoden zur Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke unter Zugrundelegung sämtlicher sechs trigonometrischen Funktionen.

Praktische Geometrie.

Die Entwicklung der Trigonometrie steht in Zusammenhang mit dem gesteigerten Interesse an den Aufgaben der praktischen Geometrie. Der ungeheuer angewachsene Verkehr und das Bedürfnis nach neuen, besseren Verkehrswegen gab der Feldmessung in der Vorarbeit für die Anlage einer zweckmäßig geführten Straße eine neue Bedeutung. Außerdem hatten der in rascher Entwicklung begriffene Seeverkehr und die großen Entdeckungsfahrten das Bedürfnis nach einer genauen astronomischen Ortsbestimmung erweckt. Dies Bedürfnis vermochte man allerdings nur hinsichtlich der Breitenbestimmung zu befriedigen; bei der Längenbestimmung bildete das Fehlen genauer Uhren ein unübersteigliches Hindernis. Mit den Entdeckungsfahrten steht auch in Zusammenhang die Neuentwicklung der Erdbeschreibung und die Herstellung von Erdkarten und Atlanten. Auch hieran hat die Mathematik einen Anteil, insofern sie lehrt, das Gradnetz der Erde nach einer festen Regel in zweckmäßiger Weise auf das ebene Kartenblatt zu übertragen. Eine einfache Form der Darstellung, welche die Eigentümlichkeit hat, daß bei ihr kleine Teile der Erdoberfläche wirklichkeitsgetreu abgebildet werden, war durch die stereographische Projektion des Ptolemäus gegeben. Die für die Zwecke der Seefahrt nützlichste Form wurde dagegen gerade im 16. Jahrhundert, etwa gegen die Mitte, von Gerhard Mercator gefunden. Bei dieser Darstellungsform wird der Weg eines unverändert denselben Kurs steuernden Schiffes als gerade Linie abgebildet.

Kartographie.

Astronomie.

Alle diese Entdeckungen werden aber überstrahlt von den Arbeiten auf astronomischem Gebiet. Das Weltsystem des Domherrn Nikolaus Kopernikus (1473—1543) erscheint uns als eine gewaltige Tat des menschlichen Geistes, die alles andere in den Schatten stellt. Die Quelle der Kopernikanischen Lehre ist bezeichnend für das Zeitalter der Renaissance; sie lag in dem Studium der Alten, verbunden mit dem Streben, der unbedingten Autorität des Aristoteles entgegenzuarbeiten und auch die gegnerischen Meinungen zu ihrem Recht kommen zu lassen. Kopernikus berichtet selbst: „Ich gab mir alle Mühe, die Bücher der Philosophen, deren ich habhaft werden konnte, von neuem zu lesen, um nachzusuchen, ob nicht irgendeinmal einer der Ansicht gewesen wäre, daß andere Bewegungen der Himmelskörper existierten als diejenigen annehmen, welche in den Schulen die mathematischen Wissenschaften lehren. Da fand ich denn zuerst bei Cicero, daß Hiketas von Syrakus geglaubt habe, die Erde bewege sich. Nachher fand ich auch bei Plutarch, daß andere gleichfalls dieser Meinung gewesen sind. Von da ausgehend, fing ich an über die

Beweglichkeit der Erde nachzudenken.“ Merkwürdigerweise sind ihm aber die Ansichten des Kardinals Nikolaus Cusanus unbekannt geblieben. Die Resultate seiner Versuche, die unbestimmten Äußerungen in den älteren Schriftstellern zu einer bestimmten mathematischen Beschreibung der Planetenbewegung zu verdichten, hielt Kopernikus lange verborgen. Das schließliche Erscheinen seines großen Werkes De Revolutionibus orbium coelestium (1543) hat er nicht mehr erlebt. Was in diesem Werke siegreich hervortritt, ist die Macht des mathematischen Geistes, der mit dem einfachsten geometrischen Bilde der Naturvorgänge auch die quantitative Erklärung der beobachteten Erscheinungen verbindet und so dem leeren Wortgepränge der Scholastiker den klärenden Einfluß von Maß und Zahl gegenüberstellt.

Die Mathematik auf den Universitäten.

Solchen großen wissenschaftlichen Aufgaben und Leistungen gegenüber steht das Unterrichtswesen der Hochschulen keineswegs auf der Höhe, die wir vermuten sollten. Es erhielt sich vielmehr fast genau in derselben Form, wie wir es im 15. Jahrhundert, im „finsteren Mittelalter“, gefunden haben. So war es noch, als Galilei mit großem Zulauf in Padua lehrte, und die Titel (wenn auch nicht der Geist) seiner Vorlesungen sind zum größten Teil genau dieselben wie sie schon zweihundert Jahre vorher waren. Die jungen Leute, die bei ihm Astronomie hörten, waren zum größten Teil Mediziner, welche die Vorlesung brauchten, um bei der Behandlung der Krankheiten den Aspekt der Gestirne richtig beobachten zu können. So hängen hier Aberglaube und Wissenschaft eng zusammen. Die Reformation hat den Zustand der mathematischen Studien an den Universitäten kaum verbessert. An der großen Hochschule der Reformation in Wittenberg war statutengemäß ein Professor für Arithmetik und die Sphaera des Johannes de Sacrobosco und ein Professor für Euklid, die Theoria Planetarum Peurbachs und den Almagest des Ptolemäus vorgesehen. Der Mathematiker hatte aber wegen der geringen Vorliebe für das mathematische Studium immer nur wenig Zuhörer. Melanchthon, der entschieden für die Mathematik eingetreten ist, „weil sie das methodische Denken übt, das Urteil bildet und den Geist gewöhnt nach Beweisen zu suchen und die Wahrheit zu lieben“, schreibt einmal an den Herzog Albrecht von Preußen: „Höchst wenige legen sich auf Mathematik und noch weniger sind unter den Machthabern, welche dieses Studium begünstigen. Unser Hof bekümmert sich wenig darum.“ Bezeichnend ist die Einladungsrede des Rhaeticus bei der Übernahme der Mathematikprofessur in Wittenberg 1536, die Studenten möchten sich durch die Schwierigkeit der Arithmetik nicht abschrecken lassen, die ersten Elemente seien leicht, die Lehre von der Multiplikation und Division verlange allerdings schon etwas mehr Fleiß, könne aber bei einiger Aufmerksamkeit ohne Mühe bewältigt werden, allerdings gebe es noch schwierigere Teile der Arithmetik, aber er rede nur von den Anfängen, die den Studierenden gelehrt würden und nützlich seien. Wir können uns schwer hineinversetzen, daß etwas so Elementares wie das gewöhnliche Rechnen auf der Universität gelehrt werden mußte und noch hier Widerstand fand. Die Gymnasien verhielten sich aber ganz ablehnend dagegen. Auf dem Sturmschen Gymnasium in Straßburg

wurde erst 40 Jahre nach der Gründung, im Jahre 1578, in der Sekunda etwas Arithmetik und in Prima einige Sätze aus dem ersten Buche des Euklid eingeführt, dazu sollten die Elemente der Astronomie gelehrt werden. So stehen wir vor der befremdenden Tatsache, daß die gelehrten Berufe vielfach überhaupt nicht rechnen lernten. Man denke sich den Zustand: die Gebildetsten der Nation waren den Aufgaben des täglichen Lebens gegenüber hilfloser wie heutzutage ein Hökerweib!

Wie tief das mathematische Studium auf den Universitäten stand, kann man daraus entnehmen, daß die Universitätslehrer vielfach die Verfasser von Rechenbüchern sind, die zuerst als Kompendien für ihre Vorlesung gedacht waren. So ist das Rechenbuch von Heinrich Schreiber, genannt Grammateus, entstanden, das er nach den Aufzeichnungen für seine Vorlesungen herausgab, als 1521 die Wiener Universität wegen einer Seuche geschlossen wurde. So leitet auch ein Leipziger Universitätsprofessor, Heinrich Stromer, 1520 seinen Algorithmus linealis mit der an einen seiner Schüler gerichteten Bemerkung ein, der Zweck seines Buches sei, daß nicht ihm und seinen übrigen Schülern die Grundlagen der Mathematik gänzlich verborgen bleiben sollten. Die mathematischen Universitätsvorlesungen begnügten sich sonach vielfach damit, den Studierenden für ihr späteres Leben die elementarsten Kenntnisse im Rechnen mitzuteilen. Sie suchten so den gelehrten Ständen das wenigstens einigermaßen zu sichern, was dem Kaufmannsstande in gründlicherer Form durch die Rechenschulen gewährleistet wird.

Das kaufmännische Rechnen.

Die Ausbreitung des modernen kaufmännischen Rechnens, die mit der Ersetzung der römischen Ziffern durch die arabischen Hand in Hand geht, ist einer der wichtigsten Prozesse des ganzen Kulturlebens. Er ist mit der Ausbreitung des Handels unmittelbar verknüpft und schreitet vom 15. Jahrhundert ab rasch fort. Eine besondere Unterstützung bot ihm die neuentdeckte Buchdruckerkunst, denn sie erlaubte die Herstellung billiger Rechenbücher. Das älteste uns erhaltene Rechenbuch in deutscher Sprache ist das von Ulrich Wagner (1482). Ihm folgte 1489 das von Widmann. Es behandelt im ersten Teil die unbenannten Zahlen, im zweiten die kaufmännischen Rechnungsarten und im dritten Geometrie. Die Stoffanordnung im zweiten Teil ist im wesentlichen genau dieselbe, wie sie sich heute noch in unseren Schulbüchern findet. Das Rechnen wurde in jener Zeit an bestimmten Rechenschulen von Rechenmeistern gelehrt. Zu Beginn des 16. Jahrhunderts wirkte als der berühmteste Rechenmeister Johann Neudörffer der Ältere in Nürnberg. Seine Schüler zogen als Rechenlehrer nach allen Gegenden Deutschlands. In Mitteldeutschland gelangte zu sprichwörtlicher Berühmtheit Adam Riese (1492—1559), dessen erstes Rechenbuch 1518 erschien. Die Quartausgabe von 1550 kann als das beste Rechenbuch dieser Zeit bezeichnet werden. Das Unterrichtsverfahren der Zeit war rein mechanisch. Man suchte eine bequeme Lösungsmethode aus, auf die dann immer und immer verwiesen wurde mit der einfachen Vorschrift „Mach's nach der Regel!“. Der Unterricht war Einzelunterricht. Jeder Schüler beschäftigte sich selbst, indem er das Rechenheft seines Meisters

durchzurechnen suchte; kam er nicht weiter, so fragte er. Nur zwischendurch erhoben sich Stimmen, die einen Klassenunterricht forderten. Dennoch waren die Rechenschulen besser als die Volks- und Winkelschulen. Die Rechenmeister suchten ihren Stand zu heben, indem sie sich zu Zünften vereinigten, die Zahl beschränkten und eine bestimmte Vorbildung vorschrieben. Zur Vorbereitung auf die Lehrerprüfung schrieb 1616 der Nürnberger Rechenmeister Johann Heer Arithmeticae et geometricae Questiones. Die Rechenlehrer studierten nicht bloß das gewöhnliche Rechnen, sondern auch die theoretische Arithmetik, und so wurde die Ausbildung der Rechenpraxis gleichzeitig auch der Anlaß für eine weitere Ausbreitung der wissenschaftlichen Mathematik.

Mathematisches Studium.

Allgemein ist über die Beschäftigung mit der wissenschaftlichen Mathematik in dieser und auch noch in der späteren Zeit zu sagen, daß sie nicht an einen bestimmten Lehrbetrieb geknüpft war, daß sie vielmehr fast immer wesentlich auf Sonderstudium beruhte. Entweder fand der Lernbegierige einen Lehrer, der ihm durch Privatissima weiterhalf, oder er erwarb sich seine Kenntnisse rein autodidaktisch aus Büchern. In dem Zeitalter der Renaissance waren es hauptsächlich die Schriften der alten griechischen Mathematiker, an denen sich das Studium der Wissenschaft aufrankte. Euklid wurde auch der Lehrmeister der neuen Zeit. Neben ihm wurden die Werke des Archimedes, Heron und Ptolemäus eifrig studiert. Die Hinneigung nach dem Vorbild der Alten ist ja überhaupt ein Kennzeichen der Renaissance; z. B. hat das Werk des Vitruv über die Baukunst eine ungeheure Bedeutung erlangt, man suchte aus ihm die ganzen Kunstgeheimnisse des Altertums zu enträtseln. Die humanistische Bewegung bedingte, daß man bald auch dazu überging, die griechischen Mathematiker nicht bloß in der lateinischen Übersetzung, sondern auch im Original zu studieren. So begegnen uns in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts auch die ersten griechischen Druckausgaben des Euklid (1533), des Ptolemäus (1538) und des Archimedes (1544).

Praktische Mathematik.

Zu solchen Studien war eine ausgebreitete Buchgelehrsamkeit nötig. Aber die Beschäftigung mit der Mathematik ist in dieser Zeit keineswegs auf die Gelehrten beschränkt gewesen, vielmehr wurde sie von Künstlern und Technikern mit Eifer und Hingebung getrieben. Diese aus der Praxis erwachsene Bildung, in der sich das Wissen der mittelalterlichen Bauhütten fortsetzt, ist sich mit Stolz bewußt, keinen anderen Lehrmeister als die Erfahrung und das Nachdenken über die Ergebnisse der Erfahrung gehabt zu haben. Zum erstenmal stellt sich eine von aller Überlieferung unabhängige, nur auf dem Zeugnis der eigenen Sinne und den Früchten des eigenen Nachdenkens beruhende Wissenschaft entschieden der Schulweisheit gegenüber. Es tritt ein Wissen auf, das sich rühmt, unmittelbar der Natur entsprossen und nicht durch die Meinungen anderer Menschen beeinflußt zu sein. Bezeichnend ist die Erzählung in Vasaris Lebensbeschreibung, wie Brunellesco mit dem nach Florenz zurückgekehrten Paolo Toscanelli Freundschaft schließt und von ihm Geometrie lernt. Es heißt darin weiter: „Obwohl Brunellesco keine literarische Bildung besaß, konnte er ihm doch von allen Dingen Rechenschaft

geben vermöge des natürlichen Wissens seiner praktischen Erfahrung, so daß er ihn häufig überraschte.“ Lionardo da Vinci nennt sich mit Stolz einen Schüler der Erfahrung, und auch bei Galilei finden wir dieselbe Stimmung. Er spricht von dem Buche der Natur, in dem wir unmittelbar ohne eine dazwischengeschobene Lehrmeinung lesen sollen und dessen Schriftzeichen mathematische Formeln und Figuren sind. Es ist die Bedeutung dieser Mathematik der Renaissance, daß sie mit der Rückkehr zu der unmittelbaren, unbefangenen Betrachtung der Natur, mit der Begründung der modernen Naturwissenschaft in engstem Zusammenhange steht. Vielfach hat man in dieser Entwicklung einen bewußten Gegensatz gegen das christliche Mittelalter vermutet. Ein solcher Gegensatz des emanzipierten Laientums gegen die geistliche Gebundenheit des Denkens besteht aber eigentlich nicht. Wir können dies deutlich an der Persönlichkeit eines Nikolaus von Cusa (1401—1464) erkennen, der, selbst ein hoher Würdenträger der Kirche, doch die ganzen Ideengänge vorgebildet hat, die später das 16. Jahrhundert bewegen. Seine Ansichten stehen denen eines Giordano Bruno sehr nahe, nur die dazwischen eingetretene Reformation und Gegenreformation bewirkte, daß als anstößig und religionsfeindlich galt, was vorher unbedenklich hingenommen worden war. In der Zeit, da sich um Lionardo da Vinci in Mailand ein Kreis bildete, der sich die Erforschung der Wirklichkeit und ihre technische Beherrschung zum Ziele setzte, war ein solcher Gegensatz noch nicht vorhanden. Hätte Galilei hundert Jahre früher gelebt, so hätte er kaum irgendwelche Anfeindung erfahren. Typisch ist für die Frührenaissance der Bildungsgang, den einer ihrer Hauptvertreter, Leo Battista Alberti, durchgemacht hat. Ausgezeichnet durch ungewöhnliche körperliche Kraft und Gewandtheit, in allen ritterlichen Übungen erfahren, wird er Geistlicher und gibt sich dem Studium der Rechtswissenschaft mit solchem Eifer hin, daß sein starker Körper der Anstrengung unterliegt. Von dem Nervenleiden, das ihn befällt, sucht er Heilung durch einen Wechsel der Beschäftigung; so wendet er sich mathematischen Studien zu und gelangt von diesen aus zur Kunst, in der er als Baumeister großen Ruhm erlangt hat. Die staunenswerte Vielseitigkeit, der unvermittelte Übergang von einem Beruf zum anderen ist bezeichnend für diese Zeit einer mächtigen Entwicklung. Ebenso wendet ja auch Lionardo da Vinci, nachdem er bisher nur als Künstler tätig gewesen, sich plötzlich der Technik zu, indem er sich dem Herzog von Mailand als Ingenieur anbietet, und seine Manuskripte, die uns ein gütiges Geschick erhalten hat, zeigen deutlich die Universalität seines Genies.

Rückkehr zur unmittelbaren und unbefangenen Betrachtung der Natur.

Drang zur universellen Betätigung.

Diese Universalität zeigt sich auch in der ganzen mathematischen Literatur der Zeit. Mathematik bedeutete überhaupt nicht mehr eine bestimmte Wissenschaft, sondern nur das geistige Band, das die neue, auf der Erfahrung und ihrer methodischen Durcharbeitung aufgebaute Wissenschaft zusammenhielt. Diese Wissenschaft war so weit wie das reale Interessengebiet des Zeitalters. So wurde die Baukunst zur Mathematik gerechnet, ebenso die Malerei in der Form der Perspektive. Das neuentwickelte Heerwesen be-

Enzyklopädischer Charakter der mathematischen Lehrwerke.

dingte eine Menge von technischen Kenntnissen, die man ebenfalls einfach der Mathematik zuerteilte. Es war zunächst das Befestigungswesen, dann die Taktik und endlich die Ballistik, die nicht nur von militärischen Fachleuten, sondern von jedem, der sich dazu berufen fühlte, behandelt wurden. Die uns heute geläufige Anschauung, daß jeder nur über sein bestimmtes Fachgebiet schreiben könne, ist in jener Zeit überhaupt nicht vorhanden. Wozu man Lust in sich spürt oder wovon man sich Gewinn erhofft, das treibt man. So ergibt sich eine allerdings häufig dilettantische Vielwisserei, die fast immer unter dem Namen der Mathematik zusammengefaßt wird und deren Träger sich als Mathematiker fühlen und bezeichnen.

Typisch für dieses mathematische Bildungswesen des 16. Jahrhunderts ist das Buch von Tartaglia, La nuova Scientia (Die neue Wissenschaft) 1537, schon in seiner äußeren Gestalt. Auf dem Titelblatt ist im Vorhof des Tempels der Philosophie, zu der Aristoteles die Tür öffnet und an deren Eingang Platon die bekannten Worte spricht, daß kein der Geometrie Unkundiger eintreten dürfe, der Verfasser dargestellt, wie er, geleitet von Arithmetik und Geometrie, mit einem großen Gefolge anderer Wissenschaften auf den Beschauer zuschreitet. Davor sind die Flugbahnen der Geschosse angedeutet, die er zuerst bestimmt zu haben sich rühmt. Zu dem Vorhof macht Euklid die Tür auf. Darunter stehen die Worte: Disciplinae mathematicae loquuntur: Qui cupitis rerum varias cognoscere causas, Discite nos, cunctis haec patet una via. In dem Buche selbst findet sich allerlei untermischt: die Bestimmung der Höhen und Entfernungen mit Hilfe des Quadranten, ein Verfahren, gesunkene Schiffe zu heben, das dem Prinzip unserer Schwimmdocks entspricht, die Archimedische Hydrostatik, Meteorologisches, sowie die Bestimmung des spezifischen Gewichtes. Die 1546 erschienenen vermischten Untersuchungen und Erfindungen (Quesiti et invenzioni diverse) desselben Verfassers sind von ähnlicher Art, sie betreffen die Wurfbahn der Geschosse, die Aufstellung der Heere, die Landmessung mit der Bussole, die Befestigungskunst, die Statik, endlich die Gleichung dritten Grades, deren Lösung Tartaglia selbständig gefunden zu haben behauptet. Noch deutlicher drückt sich die Neigung der Zeit zur Vielwisserei in dem Werke des Cardano De Subtilitate (1550) aus, dessen 21 Bücher alles Mögliche, was merkwürdig und seltsam scheint, behandeln, z. B. die Frage, wie man Briefe schreiben kann, die erst lesbar werden, wenn man sie ins Wasser legt, wie man eine Lampe so aufhängen kann, daß das Öl nicht herausfließt, auch wenn sie sich auf schwankendem Schiffe befindet. Aber derlei Dinge rechnete man wirklich zum mathematischen Wissen. In demselben Werke des Cardano finden sich auch nicht unwichtige mechanische Probleme behandelt, in engem Anschluß an Lionardo da Vinci, und im 15. Buch bespricht er einen Reformversuch der Euklidischen Beweisgänge. Auch in deutscher Sprache finden sich derartige Werke. Die Bücher Albrecht Dürers, der nicht bloß über die Geometrie vom künstlerischen Standpunkt aus, sondern auch über die Proportionen des menschlichen Körpers und die Befestigungskunst geschrieben hat, bilden ein Bei-

spiel dafür. Zum Teil auf den Tartagliaschen Schriften beruht das Werk von Rivius (1558), das den Titel trägt: „Baukunst oder Architectur allerfürnemsten, nothwendigsten, angehörigen mathematischen und mechanischen Künsten eygentlicher Bericht und verständtliche Underrichtung, zu rechtem Verstandt der Lehre Vitruvii". Hier ist direkt das Wort Baukunst für dasselbe gebraucht, was sonst Mathematik genannt wird. Das Buch beginnt mit einem geometrischen Kapitel „Allerlei Vorteil und Behendigkeit des Zirkels und Richtscheits". Dann kommt die Kunst des „perspektivischen Reissens", die „new Büchsenmacherey aus geometrischem Grundt", weiter die Befestigungslehre, Taktik, Feldmeßkunst und die Mechanik. Die weiteste Ausbreitung vielleicht zeigen die mathematischen Werke des Simon Stevin, die gegen Ende des 16. Jahrhunderts geschrieben, aber erst 1634 in einer Gesamtausgabe erschienen sind. Sie sollen für den Unterricht des Prinzen Moritz von Nassau entstanden sein und enthalten der Reihe nach Arithmetik, Trigonometrie, Astronomie, Geographie, die Bestimmung der Wolkenhöhe, die Kompaßlehre, Nautik, eine Theorie von Ebbe und Flut, einen Abriß der praktischen Geometrie, daneben rein theoretische Betrachtungen über Flächen- und Körperverwandlung u. dgl., darauf die Statik, wobei auch die später durch ihre Bedeutung für die gesamte graphische Statik so berühmt gewordene Figur des Seilecks gegeben wird, die Theorie der Flaschenzüge (die sich ebenfalls bei Cardano findet), ferner die Hydrostatik mit Betrachtungen über die Stabilität schwimmender Körper. Dem höfischen Zweck ist eine Untersuchung über die Wirkung des Zaums auf das Pferd angepaßt. Dann wird die Einrichtung der Feldlager und die Anlegung der Befestigungen besprochen. Auch die Perspektive findet eine Stelle. Alles ist mit schönen griechischen Namen bezeichnet.

Allgemeiner Charakter der mathematischen Literatur des 16. Jahrhunderts

Der allgemeine Eindruck, den die mathematische Literatur des 16. Jahrhunderts macht, ist nicht immer allzu günstig. Es herrscht die Neigung zu einer großen Weitschweifigkeit, die mit dem Inhalt manchmal nicht im Verhältnis steht, ein ruhmrediges Hervorheben der eigenen Verdienste und Verschweigen der fremden Leistungen. So hat man manches für eine selbständige Leistung dieser Zeit gehalten, was in Wirklichkeit aus einer früheren Zeit übernommen ist Um nur ein Beispiel zu nennen, hat Tartaglia die Euklidübersetzung des Wilhelm von Mörbecke einfach abgeschrieben und mit einer prahlerischen Vorrede als sein eigenes Werk herausgegeben. Die ganze Zeit erfüllt eine allgemeine Gier nach Ruhm und Besitz. So mangelt die Ruhe und Sammlung zu gründlicher wissenschaftlicher Arbeit. Die sich mit der Mathematik beschäftigen, sind jetzt meistens Laien. Ihnen fehlt die wirtschaftliche Sicherung, die der geistliche Stand gewährt, sie müssen um ihr Dasein kämpfen, denn was sie können, dient an sich wenig zur Erlangung materieller Güter. Da suchen sie sich denn als Wundermänner zu gebärden und rühmen sich geheimnisvoller Kenntnisse. Sie kommen so der Neigung der Zeit entgegen, die überhaupt nach dem Seltsamen und Wunderbaren trachtet. Es ist die Zeit, wo die geheimen Wissenschaften einen ungeheuren Aufschwung nehmen.

Auch von Kepler noch ist bekannt, daß er sich sein Brot als Astrolog verdienen mußte, und er sagt selbst: Die ernste Wissenschaft, die Astronomie, könnte betteln gehen, wenn ihre närrische Tochter, die Astrologie, ihr nicht hülfe.

Beginn der modernen Naturforschung.

Das Forschen nach den geheimnisvollen Kräften der Natur hat aber doch eine gute Wirkung gehabt: es führte dazu, überhaupt durch Beobachtung und Versuche die Naturvorgänge zu erschließen, und es hat so die empirische Naturforschung hervorgerufen. Die Entstehung der modernen Naturwissenschaft steht aber in enger Verbindung mit der mathematischen Betrachtungsweise. Wir können dies deutlich an den drei Männern erkennen, die wir an den Anfang der modernen Naturforschung stellen dürfen: dem Engländer Gilbert (1540—1603), dem Deutschen Kepler (1571—1630) und dem Italiener Galilei (1564—1642). Erst bei ihnen fühlen wir wirklich den Odem einer neuen Zeit. Am wenigsten bekannt von ihnen ist Gilbert, aber seine Schrift über den Magnetismus, die 1600 erschien, ist eigentlich das erste moderne naturwissenschaftliche Werk, das die ganze Naturbetrachtung auf eine systematisch geleitete Beobachtung und mathematische Darstellung gründet. Es hat auch auf Galilei einen großen Einfluß ausgeübt. Kepler hat durch seine Gesetze der Planetenbewegung, die allgemeine empirische Tatsachen bedeuten, die moderne Astronomie begründet, und Galilei hat nicht minder durch seine astronomischen Entdeckungen wie durch die Auffindung der Fallgesetze auf die Naturwissenschaft bestimmend eingewirkt. Bei Kepler sowohl wie bei Galilei können wir aber beobachten, wie sie sich erst zu der neuen Auffassung durchringen mußten. Kepler hat damit begonnen, daß er in seinem Mysterium cosmographicum (1596) ein Weltsystem auf Grund apriorischer geometrischer Überlegungen, nämlich von den regulären Körpern ausgehend, aufzustellen suchte und Galilei setzte mit dem Studium der Aristotelischen Physik ein, die denselben Irrweg geht, allein aus dem Denken heraus die Wirklichkeit konstruieren zu wollen. Aber in Keplers und Galileis Anschauung bleibt doch ein tiefgreifender Unterschied. Galilei dringt zu einer völligen Beseitigung jeder mystischen Beimengung durch, er sieht als den einzigen Weg der Naturerkenntnis die mechanische Erklärung der alten Materialisten an, bei Kepler dagegen bleibt ein religiöser Zug bestehen, ihm ist die Welt das geheimnisvolle Werk eines weisen Schöpfers.

VI. Die mathematische Bildung des 17. und 18. Jahrhunderts.

Das 17. Jahrhundert das mathematische Jahrhundert.

Gilbert, Kepler und Galilei ragen schon in das 17. Jahrhundert hinüber und bereiten die große geistige Bewegung vor, die dieses Jahrhundert auszeichnet. Es wird mit Recht als das mathematische Jahrhundert bezeichnet. Wenn die Mathematik in dem vorhergehenden Jahrhundert bei allem energischen Aufschwung immer noch etwas Spielerisches und Dilettantisches gezeigt hatte, so wird jetzt wirklich Ernst damit gemacht, die Mathematik nicht bloß um ihrer selbst willen auszubauen, sondern sie als das mächtigste Werkzeug zur Erkenntnis der Natur auszubilden, ja zur Grundlage der ganzen Weltauffassung zu machen.

Mathematische Entdeckungen

Das 17. Jahrhundert beginnt mit den größten und wichtigsten mathematischen Entdeckungen. Um das Jahr 1610 finden fast genau gleichzeitig Jost Bürgi und John Napier die Logarithmen. Dadurch ist nicht bloß das wichtigste Hilfsmittel für die wissenschaftliche Rechnung geschaffen, es ist auch für die prinzipielle Auffassung der Mathematik ein großer Fortschritt gemacht. Im Jahre 1637 erscheint Descartes' Geometrie, welche die Grundlage der modernen analytischen Mathematik gebildet hat, und fast genau gleichzeitig wird (1635) durch Cavalieri und auf andere Art durch Fermat zunächst in einer geometrischen Form die moderne Infinitesimalrechnung inauguriert. Durch Desargues und Pascal wird die moderne projektive Geometrie begründet. Galilei schafft durch seine großen Werke den festen Unterbau für die moderne Physik und Astronomie. Galilei und Pascal entdecken ferner ein neues merkwürdiges Anwendungsgebiet der Mathematik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die größte Aufgabe der praktischen Geometrie, die Ausmessung der Erde selbst, wird von Snellius auf Grund des schon von Gemma Frisius angegebenen Triangulationsverfahrens in der ersten wissenschaftlichen Gradmessung (Eratosthenes batavus, 1617) durchgeführt. Snellius schreibt auch 1624 das erste mathematische Lehrbuch der Schiffahrtskunde, und gibt in dem von ihm entdeckten Brechungsgesetz der Lichtstrahlen eine der wichtigsten Grundlagen für die mathematische Naturbeschreibung.

Mathematische Philosophie.

Aber die Wirksamkeit der Mathematik geht in dieser Zeit weit über die engeren Grenzen des Faches hinaus. Bedenken wir bloß, daß Descartes und Pascal es gleichzeitig waren, welche die moderne französische Sprache geschaffen haben, und diese hat die Eigentümlichkeit des mathematischen Stils, die Verwendung eines beschränkten Wortschatzes in vollendeter Klarheit der Gedankenverbindung, dauernd bewahrt. Das mathematische Denken greift ebenso auch entscheidend in die ganze Weltbetrachtung ein, ja es überträgt sich selbst auf die Erforschung der Vorgänge des seelischen Lebens. Als den Urheber dieser mathematischen Philosophie können wir Giordano Bruno ansehen, der gerade um die Wende des Jahrhunderts den Feuertod für seine Überzeugung stirbt. Für diesen leidenschaftlichsten Gegner der kirchlichen Gebundenheit des Lebens und des Denkens wird die Mathematik ein Mittel, um die Dialektik der Schulen zu bekämpfen, indem er die Klarheit der geometrischen Vorstellung an die Stelle der verschwommenen Wortspielerei setzt. Aristoteles ist der Gegner, gegen den er überall loszieht, und wie Aristoteles das mathematische Denken aus der Philosophie der Griechen beseitigte und durch die sprachliche Analyse der Redeformen und Begriffe ersetzte, so hebt Giordano Bruno umgekehrt die durch Aristoteles abgesetzte pythagoreische Philosophie wieder auf den Schild. Auch zu der mathematischen Atomistik der Pythagoreer kehrt er zurück. Nur die starre Geschlossenheit, die auch die Pythagoreer dem Kosmos gaben, ersetzt er durch die unbegrenzte Weite einer unendlichen Welt. In dieser Unendlichkeitslehre spiegelt sich der ins Unermeßliche gehende Drang des Zeitalters wider. Wie Giordano Bruno den deutlichen Ausdruck dafür findet, was seine Zeit bewegt, so hat er zweifel-

los auch auf seine Zeit, besonders auf Galilei einen großen Einfluß ausgeübt. Freilich bleibt dieser Einfluß uneingestanden, da die Schriften des Gerichteten verboten sind und nicht genannt werden dürfen.

Die Erhebung der mathematischen Anschauung und des mathematischen Denkens zur führenden Stellung in der Betrachtung der ganzen Weltordnung, die Giordano Bruno gewollt hatte, setzt sich in dem folgenden Jahrhundert siegreich durch. Diese mathematische Philosophie erlangt in Descartes, Spinoza, Hobbes und Leibniz die entschiedene Herrschaft. Descartes hebt zunächst die Bedeutung der Mathematik für die Methodik des Denkens überhaupt hervor und sucht das Wesen der mathematischen Erkenntnis auf alle wirkliche Wissenschaft methodisch auszudehnen. Sein bekanntes Wort „Wahr ist, was ich klar und deutlich einsehe“ bedeutet nichts anderes, als daß mathematische Gewißheit jeder wahren Erkenntnis innewohnen müsse. Aus mathematischen Gedankenkonstruktionen hat er denn auch sein System aufgebaut und er widersetzt sich heftig der empirischen Betrachtungsweise Galileis, die in der Natur nur die einzelnen Tatsachen zu beobachten, aber nicht aus allgemeinen Gesichtspunkten die Naturvorgänge mit mathematischer Gewißheit zu deduzieren vermag. In demselben Sinne hat Spinoza seine Ethik (1677) „in geometrischer Weise“ behandelt und genau nach dem Muster der Euklidischen Elemente in Definitionen, Axiome, Lehrsätze und Beweise eingeteilt. Hobbes (On body 1655) hat in ähnlicher Weise, aber mit mehr praktischem Sinn auf der Grundlage des mathematischen Denkens eine materialistische Philosophie aufgebaut. Am tiefsten aber von allen ist vielleicht Leibniz (1646—1716) in den Geist der mathematischen Betrachtung einerseits und in die Erklärung der Wirklichkeit aus einheitlichen Prinzipien andererseits eingedrungen. Sein System ist von allen sozusagen das metaphysischste, bei ihm sind die Erklärungsgründe am weitesten von dem Bereich des Beobachtbaren entfernt. So mündet dieser Weg, der von der Mathematik seinen Ausgang nimmt, weitab von der Erfahrung aus, er hat ein neues metaphysisches System geliefert, das wenigstens in Deutschland in seiner Ausgestaltung durch Christian Wolff während des ganzen 18. Jahrhunderts die Herrschaft führt, bis dann Kant, wieder wesentlich beeinflußt durch Newtons mathematisches Weltbild, eine neue Ära der Philosophie herbeiführt.

Verbindung von Mathematik und Experiment in England.

Daneben geht aber eine andere Entwicklungsreihe, die sich viel enger an die Erfahrung hält. In dieser Entwicklungsreihe stehen die englischen Physiker und Mathematiker wie Boyle (1626—1691), Hooke (1645—1703), Wallis (1616—1703) und Newton (1642—1727). Diese Männer stecken sich nicht von vornherein so hohe Ziele wie die Philosophen. Sie begnügen sich mit der Beobachtung der einfachsten Naturvorgänge und der Erforschung ihrer mathematischen Abhängigkeiten. Die Entstehung dieser induktiven Forschung in England wird gewöhnlich, vielleicht mit Unrecht, an den Namen Bacons von Verulam (1561—1626) geknüpft. Sie findet sich in Gilberts Werk über den Magneten (1600) schon voll ausgebildet. Im Jahre 1645 gründeten nun Boyle, Wallis u. a. das Invisible College, eine naturwissenschaftliche Gesellschaft. Im

Jahre 1662 wurde dann die Londoner Königliche Gesellschaft für die Förderung der Naturwissenschaft eröffnet. Das Interesse für die empirische Naturforschung war in dieser Zeit in England allgemein, selbst der König hatte in Whitehall ein chemisches Laboratorium. Gleich zu Anfang wurden auf eine Preisfrage der neugegründeten Königlichen Gesellschaft hin die langgesuchten mathematischen Gesetze des Stoßes 1669 gleichzeitig von drei Bearbeitern, Wren, Wallis und Huygens, gefunden. In dieselbe Zeit fällt die berühmte Arbeit Newtons über die Zerlegung des weißen Sonnenlichtes durch das Prisma in die Farben des Spektrums, die das erste, nie übertroffene Beispiel einer rein experimentellen und dabei streng logischen Untersuchung bildet. Newton war es, der im Jahre 1687 durch sein großes Werk Philosophiae naturalis principia mathematica diese ganze Entwicklung zu ihrem Höhepunkt hinaufführte. Das Werk erinnert schon in seinem Titel an Descartes' Prinzipien der Philosophie, es ist im Hinblick auf dieses Buch, aber auch im bewußten Gegensatz dazu geschrieben. Die Deduktion, die bei Descartes die Form der dialektischen Argumentation und der bloßen Hypothesendichtung hat, wird wieder auf die Form der exakten mathematischen Überlegung gebracht. Der Umfang der Untersuchungen wird auf die Grunderscheinungen des physikalischen Geschehens eingeschränkt. Wenn die mathematische Deduktion die Hauptrolle spielt, so ist das nicht wie in der Ethik Spinozas eine bloße Form, sondern es geschieht auf Grund bestimmter Erfahrungen und innerhalb der Grenzen wirklicher Beobachtung.

Grundlegung der mathematischen Physik.

Newtons Werk ist am meisten bekannt geworden durch das Gesetz der allgemeinen Gravitation, durch das sich die Bewegungen aller Himmelskörper lückenlos erklären lassen. Damit fand der Gedanke, der schon bei den Pythagoreern auftaucht, daß in dem Lauf der Gestirne eine einfache Regelmäßigkeit liegen müsse, deren Harmonie sich unserem Geiste unmittelbar darbietet, seine endgültige Erledigung, freilich in einer ganz anderen Weise, als man je vorher gedacht hatte. Die mathematische Beschreibung der Bewegung ist doch verwickelter, wie man ursprünglich angenommen hatte, und sie wäre Newton nicht möglich gewesen, wenn nicht vorher Galilei für die geradlinige Bewegung und Huygens für die Kreisbewegung die Frage beantwortet hätte. Ist aber der entscheidende Begriff, der Begriff der Beschleunigung, einmal gewonnen, so ist die Formulierung des Grundgesetzes sehr einfach: die Beschleunigung, welche die Himmelskörper und alle Teile der Materie einander erteilen, ist auf sie zu gerichtet, ihrer Masse direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. Wie einfach dieses Gesetz ist, kann man erst daran ermessen, wie ungeheuer verwickelt z. B. die Bewegung des Mondes ist, wenn man sie in alle Einzelheiten verfolgt, und doch wird sie mit aller Genauigkeit allein durch das Newtonsche Gravitationsgesetz erklärt. Dadurch zeigt sich zum erstenmal die Mathematik als das gewaltigste Werkzeug des menschlichen Geistes. Was das Altertum nur ahnend empfinden konnte, ist jetzt zur Wirklichkeit geworden. Es ist gelungen, die Ordnung des Kosmos in einer einfachen Formel zusammenzufassen.

Entwicklung der neuen Analysis.

Daß dieses Werk, sowie es weiter bekannt wurde, den größten Einfluß ausüben mußte, erscheint fast selbstverständlich. Es ist als das Anfangsglied einer immer weitergehenden geistigen Entwicklung anzusehen, die das ganze 18. Jahrhundert durchzieht und in den Werken von Laplace ihre Krönung findet. Während Newton wenigstens in der Form der Darstellung der alten griechischen Methode treu geblieben war, setzt sich unmittelbar nach ihm die durch die Entwicklung der Algebra vorbereitete und durch Descartes und Fermat inaugurierte neue Formelkunst, die das Wesen der modernen Analysis ausmacht, erfolgreich durch. In der Schaffung des neuen mathematischen Stils, der die Einteilung in einzelne Propositionen durch eine fortlaufende Darstellung, die schwerfällige geometrische Entwicklung durch die übersichtliche algebraische Formel ersetzt, liegt ein großer Vorteil, aber auch die Verführung zu einer Oberflächlichkeit, zu einer Minderung der mathematischen Strenge, welche die Griechen selbst auf Kosten der äußeren Abrundung und Eleganz vermieden hatten. Das war auch mit der Grund, weshalb Newton der alten Darstellungsweise treu blieb. Der Sieg der neuen Darstellungsweise wurde wesentlich durch Newtons großen Nebenbuhler Leibniz entschieden (1684), der durch seine neue analytische Bezeichnungsweise der Infinitesimalrechnung eine von der geometrischen Symbolik der Griechen weit abweichende Darstellungsform zur Notwendigkeit machte. Dann zeigten zunächst insbesondere die Brüder Bernoulli, welcher gewaltige Fortschritt in dieser auf den ersten Blick rein äußerlich scheinenden Wandlung lag. Die großen Mathematiker des 18. Jahrhunderts, vor allen Euler und Lagrange, schufen darauf aus diesen Anfängen ein gewaltiges System. Mit dem so gewonnenen neuen Apparat erst konnte es Laplace gelingen, eine die Bewegung der Gestirne vollständig bewältigende Himmelsmechanik zu schaffen. Dazu half ihm auch die inzwischen (eben hauptsächlich durch Euler und Lagrange) begründete analytische Mechanik. So steht am Ausgang des 18. Jahrhunderts ein gewaltiger Bau des mathematischen Wissens da, und die Mathematik hat bewiesen, daß sie die exakte Beschreibung der Naturvorgänge wirklich zu leisten vermag.

Erste Versuche zur Popularisierung der mathematischen Betrachtung.

Diese Entwicklung des mathematischen Könnens im 18. Jahrhundert hat aber, wenn sie naturgemäß auch auf eine kleine Gruppe von Fachleuten beschränkt war, doch ihre weiten Kreise gezogen. Die Mathematik ist vielleicht nie populärer gewesen als im 18. Jahrhundert, und nie ist ernstlicher der Versuch gemacht worden, die Wege und Ziele der mathematischen Forschung der Gesamtheit der Gebildeten zugänglich zu machen. Diese Bestrebungen setzen schon im 17. Jahrhundert ein mit Fontenelles „Unterhaltungen über die Mehrheit der Welten“ (1686), welche die Descartessche Naturphilosophie im leichten Plauderton behandelten und selbst in den Boudoirs geistreicher Damen Eingang fanden. Gegen den Cartesianismus mußte sich die Newtonsche Weltbetrachtung erst durchsetzen. Es war kein geringerer als Voltaire, der Newton auch auf dem Kontinent allgemeine Anerkennung zu verschaffen suchte, indem er 1738 eine populäre Darstellung „Elemente der Newtonschen

Philosophie" veröffentlichte. Von da an wurde Newton neben Locke der Leitstern der französischen Aufklärung, freilich in einem anderen Sinne, als er es sich selbst gewünscht hätte. Er selbst glaubte durch seine Entdeckung für die Weisheit des göttlichen Schöpfers einen neuen Beweis geliefert zu haben, die Aufklärer aber sahen in der Gravitation einen Beleg dafür, daß die Annahme eines persönlichen Gottes entbehrlich sei. So sagt z. B. Lamennais: „Warum gravitieren die Körper gegeneinander? Weil Gott es gewollt hat, sagten die Alten. Weil die Körper sich anziehen, sagt die Wissenschaft". Wenn die Wissenschaft freilich nichts anderes zu sagen hätte, so wäre sie sehr arm, denn was hier Anziehung genannt ist, ist entweder eine übernatürliche Kraft, oder es ist nur der Ausdruck für eine bestimmte mathematische Beschreibung und erklärt im eigentlichen Sinne gar nichts.

Das Wissenschaftsideal des 18. Jahrhunderts.

Die Grundanschauungen des 18. Jahrhunderts sind zu verstehen als eine Fortführung der Ideen, die sich im Laufe des 17. Jahrhunderts ausgebildet und festgesetzt haben. Die Signatur für diese Ideen ist aber durch die Mathematik gegeben. So ist auch die Aufklärung des 18. Jahrhunderts wesentlich durch die Mathematik beeinflußt. „Ihr schwebte die Mathematik als das Ideal abstrakter, aber dabei exakter Erkenntnis vor. Sie glaubte, mit derselben Klarheit und Deutlichkeit die gesamte Wirklichkeit durchdringen und überall die einfachen Elemente herausstellen zu können; frei von aller Voreingenommenheit, unabhängig von Autorität und Tradition wollte das vernünftige Denken jeden Rest von Unklarheit und Verworrenheit aus dem Leben wie aus dem Wissen austilgen. Sie richtete sich auf das Verständnis der ewigen Gesetzmäßigkeit aller Dinge, auf die strenge Notwendigkeit alles Geschehens, auf das Gleiche, auf das immer sich Wiederholende im Zusammenhange der Natur. Diesem großen Zusammenhange sollte auch das Menschenleben eingeordnet werden, es sollte als ein Glied des Universums aus dieser Gesetzmäßigkeit heraus begriffen und geordnet werden. Das aufgeklärte Bewußtsein sollte das Leben bis auf den letzten Rest aus seiner Vernunft heraus gestalten" (Windelband, Die Philosophie im deutschen Geistesleben des 19. Jahrhunderts, 1909).

Ausbreitung der mathematischen Bildung.

Daß die Mathematik ein Werkzeug der Aufklärung bildet, ist ein Gedanke, der gerade dem 18. Jahrhundert eigentümlich ist und besonders dazu führt, das Verständnis für das Wesen der mathematischen Betrachtung möglichst weit zu verbreiten. Dieser Gedanke trieb auch Laplace, neben seinem großen Werke in einer populären Schrift das Weltsystem zu behandeln (1796). Durch Schulen und Universitäten ließ sich diese neue Bildung nicht allein mitteilen, sie war auch auf den Weg der literarischen Veröffentlichung angewiesen. Durch Lektüre mußte sich der einzelne diese Kenntnisse erwerben und seine Naturanschauung bilden. Das Streben nach Anmut und Leichtigkeit, das diese ganze Zeit durchzieht, brachte es dabei mit sich, daß diese Schriften in möglichst unterhaltender, zum Teil in vollendeter Form gefaßt sind. Einige von ihnen verdienen, zu den größten Meisterwerken der Literatur gerechnet zu werden. In keiner Zeit haben die Mathematiker zu einem so großen Publikum und in einer so klaren und verständlichen Form gesprochen. Um nur

ein paar Beispiele zu nennen, will ich an d'Alemberts berühmte Vorrede zu der großen französischen Enzyklopädie (1752) erinnern, ferner an Eulers Briefe an eine deutsche Prinzessin (1768), endlich an Condorcets Skizze eines historischen Gemäldes der Fortschritte des menschlichen Geistes (1794), welch letztere dem Gegenstande nach freilich gar nicht mathematisch, aber ganz aus dem mathematischen Geiste der Zeit heraus entstanden ist. Es zeigt, wie die Vorliebe für die Klarheit der mathematischen Deduktion zu einer Verkennung aller geschichtlichen Wahrheit und zu einem willkürlichen Aufbau der Geschichte führen kann. Die methodische Bedeutung, die man der Mathematik zuschrieb, geht auch aus dem hinterlassenen Werke des Hauptphilosophen, Condillac, über die Sprache der Kalküle (1798) hervor. Alle Tätigkeit des Geistes ist nach Condillac nichts wie ein Operieren mit bestimmten Zeichen für bestimmte Empfindungen, seine Philosophie ist ein Versuch, das Wesen der mathematischen Symbolik auf das ganze Denken auszudehnen.

Anwendungen auf das moralische Gebiet.

In enger Verbindung damit stehen die Versuche einer mathematischen Begründung der Logik, die im 18. Jahrhundert zuerst gemacht wurden, ferner die Bestrebungen, die Mathematik auch auf das moralische Gebiet anzuwenden. Diese Bestrebungen geben sich einerseits kund in einer eigentümlichen Ethik, welche die Erscheinungen des sittlichen Lebens auf der Grundlage des mathematischen Größenbegriffes zu behandeln sucht. So hat es z. B. Maupertuis gemacht. Das Gute ist danach eine positive Größe, das Böse eine negative, für die menschliche Gesellschaft fügen sich die Freuden und Leiden der einzelnen Individuen nach den Regeln der algebraischen Additon wie Ausgaben und Einnahmen in der Buchführung zusammen, und die Aufgabe der Staatsraison ist es, die Gesamtsumme nach der positiven Seite hin möglichst groß zu machen. Würde z. B. ein Zehntel der ganzen Bevölkerung getötet, damit dadurch die übrigen neun Zehntel eine doppelt so große Glückseligkeit gewinnen, so wäre damit ein Gewinn von 80 Prozent erzielt. Diese Doktrin hat in der französischen Revolution einen nur zu tatkräftigen Ausdruck gefunden. Sie offenbart sich während des 18. Jahrhunderts aber bereits z. B. in den zahlreichen Untersuchungen über den Vorteil der Pockenimpfung. Solange man nämlich zur Impfung Menschenlymphe nahm, starb ein gewisser Bruchteil der geimpften Kinder. Es galt nun abzuwägen, ob dieser Nachteil durch die Sicherung gegen die Pocken im späteren Alter aufgewogen würde, und dies wurde auf Grund einer mathematischen Überlegung getan. Von mathematischer Seite, nämlich durch Daniel Bernoulli, wurde auch eine eigentümliche Wertelehre begründet, wonach der Wert jedes Gutes nach dem bereits vorhandenen Gütervorrat des Besitzenden zu bemessen ist. In dasselbe Gebiet gehört der Versuch einer moralischen Arithmetik von Buffon, den dieser 1777 als Supplement zu seiner großen Naturgeschichte veröffentlichte, ferner die Betrachtungen Condorcets über die mathematische Untersuchung der Glaubwürdigkeit außergewöhnlicher Tatsachen und der Berechtigung der Entscheidungen durch Stimmenmehrheit. Die Anwendung auf das religiöse und das politische Gebiet liegen hier auf der Hand. Einen gewissen Abschluß

fand die Entwicklung in Laplaces großem Werke Théorie analytique des probabilités (1812), das er wieder durch eine populäre Darstellung, den Essai philosophique sur les probabilités (1814), ergänzte.

Die Mathematik tritt so im 18. Jahrhundert entschieden mit dem Anspruche auf, für die Betrachtung der Natur und des menschlichen Lebens die Führung zu übernehmen. Diese führende Rolle findet auch bei der Gründung und Zusammensetzung der Friderizianischen Akademie ihren deutlichen Ausdruck. Ihr Leiter Maupertuis (1698—1759) ist Mathematiker, ihre bedeutendsten Mitglieder sind Mathematiker gewesen, wir brauchen nur Euler, Lambert und Lagrange zu nennen. Sieht man die Bände ihrer Veröffentlichungen durch, so überwiegen die mathematischen Abhandlungen weitaus, die übrigen Wissenschaften, insbesondere die philologisch-historischen, spielen daneben eine dürftige Rolle. Das hatte seinen Grund nicht in einer parteiischen Begünstigung, sondern eben darin, daß die selbständige wissenschaftliche Arbeit der Zeit wesentlich auf mathematischem Gebiete lag. Dabei ist der dringende Wunsch bemerkbar, auch die Gebiete des geistigen Lebens zu umfassen, man will dies aber mit einem gänzlichen Mangel an historischem Sinn durch rein verstandesmäßige Überlegung erreichen. Ein typischer Vertreter dieser Geistesrichtung ist Maupertuis selbst. Voltaire hatte ihn dem König empfohlen, er hatte sich ausgezeichnet durch eine Gradmessung in Lappland, deren Vergleich mit einer gleichzeitigen Messung in Peru, allerdings auf Grund eines ziemlich fehlerhaften Resultates, die Abplattung der Erde und damit einen Beleg für das Newtonsche System ergab. In Berlin kam er nun, durch die Organisationsgeschäfte stark in Anspruch genommen und sowieso ohne eigentlichen Forschungstrieb, um trotzdem seinen wissenschaftlichen Ruhm aufrechtzuerhalten, auf die unglückliche Idee, ein schon früher von ihm auf Grund eines Leibnizschen Begriffes formuliertes allgemeines „Prinzip der kleinsten Aktion“ (1746) mit großem Nachdruck als epochemachende Entdeckung zu verkünden, weil dieses Prinzip dem Bedürfnis nach der Erklärung aller Naturvorgänge durch einen Grundsatz der Weisheit und Sparsamkeit entgegenzukommen schien. Als aber daraufhin Samuel König behauptete, in der Abschrift eines Briefes von Leibniz nicht bloß den Begriff, sondern auch das Prinzip der Aktion gefunden zu haben, ließ Maupertuis den vermeintlichen Lügner und Verleumder durch die Berliner Akademie brandmarken und Euler, von dem in Wirklichkeit alles herrührt, was an Maupertuis' Prinzip richtig ist, mußte der Sache seines Präsidenten die wissenschaftlichen Waffen leihen, die diesem selbst fehlten. Maupertuis gab statt dessen eine Menge unausgegorener Projekte und Gedanken in wirrem Durcheinander von sich, um seinem Herrn und der Welt gegenüber die Fruchtbarkeit seines Geistes zu dokumentieren. Er erreichte damit aber nur, daß er dem Spotte des für Samuel König eintretenden Voltaire rettungslos zum Opfer fiel, was allerdings dessen Bruch mit Friedrich d. Gr. zur Folge hatte, aber Maupertuis für alle Zeit der Lächerlichkeit preisgab, so daß er sich von dem Schlage nie wieder erholte.

Die Mathematik an der Akademie Friedrichs des Großen.

Verhältnis Friedrichs des Großen zur Mathematik.

Der König, der der Mathematik nie besonders wohlgesinnt gewesen war, wurde gegen sie durch die Aufgeblasenheit und Einfältigkeit, die ein gerühmter Vertreter dieser Wissenschaft gezeigt hatte, nicht gerade günstiger gestimmt. Als gar noch der erste aller lebenden Mathematiker, Leonhard Euler, ihm die Wasser in Sanssouci berechnet hatte und diese trotz der gelehrten und umständlichen Berechnung nicht springen wollten, verfolgte er die unpraktische Mathematik, die nur durch ihre abstruse Unverständlichkeit zu imponieren sucht, aber nichts Nützliches zu leisten vermag, beständig mit seinem Spott. Dabei wollte es eine eigentümliche Fügung, daß der führende Mathematiker in Frankreich, d'Alembert, ihm einer seiner liebsten Freunde und Berater blieb, wenn es ihm auch immer merkwürdig schien, daß ein Mathematiker ein so vernünftiger und klardenkender Mensch sein konnte.

Das deutsche Gelehrtenwesen, auf das die moderne französische Bildung nur einen sehr beschränkten Einfluß erlangt hatte, schien Friedrich dem Großen rückständig und veraltet, weswegen er auf die Universitäten seines Landes auch schlecht zu sprechen war. Er hielt die preußischen Universitätslehrer für einfältige Stubenhocker, die mit ihren Anschauungen noch tief im Mittelalter steckten. Als die neue Universität Göttingen in dem Nachbarland Hannover emporblühte und das wissenschaftliche Leben in Deutschland mit einem neuen Geist erfüllte, mußte er den Abstand von der zopfigen Kathederweisheit anderer Universitäten nur um so tiefer empfinden.

Die Mathematik an den Universitäten.

Die Stellung der Mathematik an den Universitäten ist bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts hin, ja darüber hinaus, wenigstens was den allgemeinen Lehrbetrieb angeht, eine recht kümmerliche gewesen. Was an Mathematik auf den Universitäten gelehrt wurde, bedeutete der Hauptsache nach kein Fachstudium, sondern gehörte zur allgemeinen Vorbereitung auf das eigentliche Berufsstudium. Auch die Tätigkeit, die Erhard Weigel (1625–1699) in Jena entfaltet hat und bei der er die Mathematik entschieden in den Vordergrund stellte, ist nicht so aufzufassen, daß es sich dabei um weitgehende mathematische Kenntnisse gehandelt habe. Vielmehr war sein Bestreben nur, das gewöhnliche Rechnen den verschiedenen Gelehrtenberufen anzupassen und eine tiefere Bedeutung für die ganze Weltauffassung daran zu knüpfen. Das alles schloß natürlich nicht aus, daß Männer, die der Mathematik den Hauptteil ihrer Lebensarbeit widmeten, einer beschränkten Anzahl von begabten Schülern ihr volles Wissen teils im persönlichen Verkehr teils auch in Privatvorlesungen weitergaben. Aber in der allgemeinen philosophischen Vorbildung fand die Mathematik nur einen sehr bescheidenen Platz. Das Hallesche Statut vom Jahre 1694 erklärt, die zu lehrende Philosophie umfasse alle Disziplinen, welche die Jugend zur Humanität bilden und zu den höheren Studien vorbereiten, als da sind: Geschichte, Geographie, Beredsamkeit, Poesie, Sprachen, Archäologie und die eigentliche Philosophie. Schmeizel verlangt in seiner Hodegetik für die Hallenser Studenten, daß der Student mitbringe: Deutsch und Lateinisch, Religionslehre, Geographie, Geschichte, Philosophie. Dazu solle er in den ersten Jahren auf der Universität lernen:

Geschichte der Gelahrtheit, der Kirche und der neusten politischen Welt, Geographie, Mathematik und Physik, „jedoch nicht mehr und auch nicht weniger als seiner Partikularabsicht gemäß“, endlich noch Politik und Naturrecht. Man kann es dieser Zusammenstellung anmerken, daß von einer gründlichen Ausbildung in einem der Fächer keine Rede sein konnte, dazu sind die Gegenstände viel zu zahlreich und verschiedenartig. Um seine Zuhörer festzuhalten, mußte der Professor den Gegenstand so leicht und fesselnd wie möglich machen. Das führte in der Mathematik aber dazu, mit glatten Worten über die Schwierigkeiten fortzugleiten, und durch einen großen Redeschwall über den Mangel an sachlicher Belehrung hinwegzutäuschen. Die mathematischen Vorlesungen können nur ein äußerst beschränktes Maß von Vorkenntnissen voraussetzen. Wir können das auch an den im Druck erschienenen Vorlesungen, die Isaak Barrow, der Lehrer Newtons, an der Oxforder Universität gehalten hat, deutlich erkennen. Nur eine einzige Vorlesung hebt sich von den übrigen durch viel weitergehenden mathematischen Gehalt ab, und diese ist wohl kaum eine allgemeine Universitätsvorlesung gewesen.

Ansätze zur Besserung.

Doch beginnt sich im 18. Jahrhundert langsam eine Wandlung vorzubereiten. Die Mathematik beginnt sich in weitere Kreise auszubreiten. So kündigt schon 1735 Segner in dem Programm seiner Vorlesungen unmittelbar nach seiner Berufung an die Göttinger Universität an: „Was ich neues gehört, gelesen oder durch eigenes Nachdenken gefunden habe oder noch finden werde, das werde ich alles nach meiner Gewohnheit Euch in einer zur Einführung geeigneten Weise mitteilen“. Das klingt ganz wie eine Charakteristik des modernen Lehrbetriebes der Universitäten. Doch blieb natürlich das Erreichte hinter dem Erstrebten weit zurück, eben weil beim Magisterexamen die Mathematik nur eines von vielen Fächern bildete. Es wurde von den Mitgliedern des Göttinger philologischen Seminars, das Gesner schon 1739 gegründet hatte, das Hören eines mathematischen Kursus, der wenigstens Rechnen, Geometrie, allgemeine Astronomie und Mechanik umfassen sollte, verlangt. Aber einzelne besonders veranlagte Studierende gingen auch weiter. Schon in den sechziger Jahren fand Kästner Gelegenheit, in besonderen Stunden Mathematik, vor allem Algebra (welchen Namen er auf die eigentliche Algebra, die Lehre von den Gleichungen, und nicht auf das einfache Buchstabenrechnen angewendet wissen wollte) zu lesen. 1770 wird von Vorlesungen Kästners über die Analysis des Endlichen und Unendlichen, praktische Astronomie und höhere Mechanik gesprochen. 1770 las u. a. Lichtenberg ein Privatkolleg über die Theorie der Kegelschnitte.

Wie im Gegensatz hierzu der Zustand im Jahre 1781 an der Wiener Universität war, darüber geben folgende Daten Auskunft: v. Metzberg las Mathematik nach Nagels Auszug aus Wolffs Handbuch vor 130 Zuhörern, Bauer Mathematik nach Wolff vor 21 Zuhörern, Scherfer höhere Mathematik mit 2 Zuhörern; höhere Astronomie wurde zweimal angeboten, fand aber keinen Zuhörer. Herbert las Physik vor 103 Zuhörern, ferner Mechanik für

Handwerker vor 70 Zuhörern. Man sieht, daß eine eigentliche Nachfrage nur für die elementaren Vorlesungen vorhanden war.

Im übrigen ist auch am Anfang des 19. Jahrhunderts der Lektionsplan in der Mathematik meist noch sehr dürftig. In Jena z. B. wird für den Winter 1802/3 angekündigt: Einführung in das Studium der Mathematik, theoretische und praktische Arithmetik, angewandte Mathematik, Algebra, populäre Astronomie, Anwendungen der Mathematik auf Jurisprudenz, Ackerbau und Militärwissenschaften. Dies Hineinziehen scheinbar so fernliegender Gebiete in die Mathematik ist noch allgemein. In Göttingen hat diese angewandte Mathematik im weitesten Sinne des Wortes im 18. Jahrhundert und bis in das 19. Jahrhundert eine ausgedehnte Pflege erfahren. Tobias Mayer las z. B. 1752 über Verfertigung, Einrichtung und Nutzen der Maschinen, über Zivilbaukunst, 1760 über praktische Feldmeßkunst, über mathematische Geographie und Hydrographie, über Kriegsbaukunst und Pyrotechnie. Als eigentlicher Professor der angewandten Mathematik wirkte L. Fr. Meister in Göttingen 1764—1788. Er veranstaltete praktische Übungen in der Feldmeßkunst und pflegte das technische Zeichnen. Sein Lehrauftrag umfaßte weiter Architektur und Befestigungswesen, auch Kriegswissenschaft. Das hat sich nach Meisters Tode noch lange gehalten. Noch 1820 liest ein Premierleutnant Stünkel über Kriegswissenschaft. Die Zurechnung der Kriegsbaukunst und Kriegswissenschaft zu den Lehrgegenständen der Hochschulen ist im 18. Jahrhundert ziemlich allgemein.

Christian Wolffs Anfangsgründe.

Bezeichnend für den Mathematikunterricht in Deutschland am Anfang des 18. Jahrhunderts sind Christian Wolffs Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. Der Verfasser sagt in der Vorrede u. a.: „Die mathematische Lehrart gibt den rechten Gebrauch der Vernunft zu erkennen, wie man nämlich zu klaren, deutlichen und vollständigen Begriffen gelange und daraus ohne Anstoß die übrigen Sachen herleite. Wer die Geheimnisse der Natur zu erforschen Lust hat und sich darüber vergnüget, wenn er die unermeßliche Weisheit und Macht des allein weisen und allmächtigen Schöpfers und Erhalters der Welt nicht aus Unwissenheit, sondern mit Verstande in seinen herrlichen Werken bewundern und die Kreatur sowohl sich als anderen untertänig machen kann, der wird durch Hilfe der Mathematik in kurzem in dieser Arbeit weiter kommen als er jemals möglich zu sein erachtet hätte, hingegen ohne ihren Beistand nur immer anfangen und nichts vollenden." Mathematik ist nach dieser Auffassung mehr eine allgemeine Art des Erfassens und Erkennens als eine besondere Fachwissenschaft. In der Tat bedeutet das Wolffsche Werk, das 1713 zuerst und schon 1717 in zweiter Auflage erschien, mehr eine Realenzyklopädie als eine Mathematik in unserem Sinne. Es behandelt der Reihe nach Rechnen, Geometrie, Trigonometrie, Baukunst, Artillerie, Fortifikation, Mechanik, Hydrostatik, Hydraulik, Optik, Perspektive, Astronomie, Geographie, Chronologie, Gnomonik (Sonnenuhren) und zum Schluß die Algebra, die mit den einfachsten Gleichungen beginnend, durch die Proportionenlehre hindurch, mit Einschluß der geometrischen An-

wendungen bis zu den Anfängen der Infinitesimalrechnung durchgeführt wird. Die verschiedenen Gegenstände werden aber alle äußerlich nach streng mathematischer Methode behandelt. So finden wir in der Baukunst, die natürlich wesentlich auf einen Auszug aus Spezialwerken oder einzelne von Fachleuten gehörte Bemerkungen hinausläuft, Lehrsätze, die genau nach Euklidischem Muster bewiesen werden; z. B. wird die Aufgabe, das Bauholz zu fällen, wie eine geometrische Konstruktionsaufgabe mit Auflösung und Beweis gegeben. Sehr viele Studierende werden aber wohl den ganzen Lehrgang nicht durchgemacht haben, Wolff gibt auch an, was man ohne Gefahr für den Zusammenhang bei einem ersten Studium herausgreifen könne und er hat selbst bald einen Auszug „zu bequemerem Gebrauch der Anfänger auf Begehren verfertigt".

Pollacks Mathesis forensis.

Es muß eine große Schwierigkeit bei den Mathematikvorlesungen gewesen sein, die Theologen, Juristen und Mediziner, die daran teilnahmen, davon zu überzeugen, daß sie wirklich einen Gewinn aus diesem Wissen erzielen konnten und es nicht als etwas Überflüssiges zu empfinden brauchten. So erklärt sich die Mathesis forensis, die Pollack, Professor der Rechte und der Mathematik an der Universität Frankfurt, im Jahre 1734 veröffentlichte. Der Verfasser sagt in der Vorrede: „Es sind unter den Wissenschaften einige, welche gleichsam zur vernünftigen Erkenntnis überhaupt gehören und die man ihres generellen Begriffes wegen überall anbringen kann, und dahin gehören billig die philosophischen und (welche unmittelbar mit diesen verknüpft) die mathematischen Wissenschaften. Einige dagegen haben nur eine ganz besondere Absicht auf dieses oder jenes Objectum, als die Jurisprudenz, Theologie und Medizin; wer nun diese ganz allein ohne jene lernen will, gehöret zu der Art Leuten, welchen man so leicht als auch den ungelehrtesten Handwerksmann weissmachen kann, die Irrlichter wären die Seelen der verstorbenen ungetauften Kinder, und der neuliche grosse Sturm wäre von dem Rübezahl auf dem Riesengebirge erregt worden." Es handelt sich in dem Buche aber nicht bloß um diese allgemeine aufklärerische Absicht, sondern auch darum, den Juristen zu einem fachkundigen Urteil auf den verschiedenen für ihn in Betracht kommenden Gebieten zu befähigen. Wenn wir im einzelnen nachsehen, was das Buch enthält, so finden wir darin behandelt: das praktische Rechnen, die Flächenmessung, die Grenzbestimmung für den Landbesitz, die Anlage der Wege, den Wasserbau, die Architektur und die Chronologie, also die Gebiete der praktisch angewandten Mathematik, die schon in fast genau derselben Zusammensetzung und mit denselben Absichten die alten Ägypter beschäftigt hatten. So steht das 18. Jahrhundert in seiner praktischen Veranlagung wieder da, wo die alten Ägypter gestanden hatten. Die praktischen Aufgaben erhalten die Führung. Das Buch von Pollack hat sehr zahlreiche Auflagen erlebt, es muß also wirklich den Bedürfnissen seiner Zeit entsprochen haben.

Eulers Algebra.

Einen großen Einfluß auf den mathematischen Schulunterricht der späteren Zeit hat Eulers Vollständige Anleitung zur Algebra ausgeübt, die 1770 in deutscher Sprache und schon vorher 1768 in russischer Übersetzung erschienen war. Die Bedeutung dieses Buches kann man daran erkennen, daß von der

französischen Übersetzung fünf Auflagen, von der englischen und amerikanischen Ausgabe je vier Auflagen bis weit in das 19. Jahrhundert hinein verbreitet gewesen sind. Die deutsche Ausgabe selbst ist nicht so oft neugedruckt worden, auch ein Auszug von Ebert erlebte nur drei Auflagen in längeren Zwischenräumen. Dafür hat das Werk aber mittelbar auf die Ausgestaltung des mathematischen Schulunterrichtes in Deutschland stark eingewirkt. Schon die Bezeichnung Algebra, die Euler für die Gesamtheit der analytischen Elementarmathematik anwendet, hat sich in diesem Sinne für den Schulunterricht erhalten. Dasselbe gilt von allen methodischen Gesichtspunkten. So findet sich die Definition der Mathematik als Wissenschaft von den Größen und die Definition der Größe als das, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, immer wieder, trotzdem in diese Definition z. B. die Lehre von den Permutationen und die Topologie schwer einzureihen sein dürften. Es ist dies die metrische Auffassung der Mathematik, die pädagogisch sicher ihre Vorteile hat, aber wissenschaftlich nicht zu halten ist. Sie gestattet Euler, positive und negative Zahlen an dem Beispiel von Vermögen und Schulden zu erklären, die Brüche durch die Teilung einer Strecke in gleiche Teile einzuführen und so fort. Die schwierige Frage nach der Bildung der kontinuierlichen Zahlreihe ist von vornherein erledigt, da die Zahlen geometrisch als Strecken gedeutet werden. Auch die Reihenfolge der arithmetischen Prozesse und die Anknüpfung der Logarithmen an den Potenzbegriff hat sich genau so, wie sie Euler gibt, trotz aller Mängel einer solchen Darstellung im Schulunterricht bis heute erhalten.

Ebenfalls von Euler übernommen ist die Anknüpfung der eingekleideten Rechenaufgaben an die in der alten Form festgehaltene Proportionenlehre und die algebraischen Gleichungen, insbesondere die linearen. Mit dem Aufsteigen bis zu den Gleichungen vierten Grades sind auch die Grenzen, die der spätere Schulunterricht innehält, bezeichnet. Nur das Eingehen auf Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten, die so zurechtgemacht sind, daß sie sich auf einfache Weise lösen lassen, findet sich bei Euler nicht so wie in unserer Schulmathematik. Die eigentliche wissenschaftliche Bedeutung von Eulers Algebra liegt in der „unbestimmten Analytik“, an diese schließt die moderne Zahlentheorie, die durch die 1801 erschienenen Disquisitiones arithmeticae von Gauß glorreich eröffnet wird, unmittelbar an.

Kein allgemein verbreiteter und bestimmt umrissener mathematischer Schulunterricht.

Im 18. Jahrhundert ist von einem eigentlichen mathematischen Schulunterricht noch kaum die Rede, er entwickelt sich erst gegen das Ende des Jahrhunderts. In einer preußischen Verordnung vom Jahre 1735 werden von den Abiturienten noch gar keine mathematischen Kenntnisse gefordert. Vom Ausgang des 18. Jahrhunderts berichtet Karl von Raumer: „Damals herrschte die Meinung, nur wenige Schüler hätten Talent zur Mathematik, eine Meinung, welche freilich durch den meist geringen Erfolg des mathematischen Unterrichts bestätigt zu werden schien. Neuere Apologeten dieses Unterrichts bestritten aber jene Ansicht. Den Schülern, sagten diese, mangle es gar nicht an Talent, Mathematisches zu erlernen, vielmehr den Lehrern an Talent, Mathe-

matisches zu lehren. Befolgten die Lehrer nur die richtige Methode, so würde sich's erweisen, daß alle Knaben mehr oder minder Fähigkeit zur Mathematik hätten". Das außerordentlich geringe Maß von mathematischen Kenntnissen, das den Schülern im 18. Jahrhundert übermittelt wurde, wurde nur in einzelnen besonderen Lehranstalten überschritten. So lag es in der Basedowschen Erziehungslehre begründet, daß sie der mathematischen Anschauung einen breiteren Raum gewährte. Im Philanthropin wurden daher auch wöchentlich drei Stunden Mathematik nach Eberts Näherer Anweisung zu den philosophischen und mathematischen Wissenschaften erteilt. Eine besondere Bedeutung hatte die Mathematik auch für die Ritterakademien wegen der Feldmessung, Befestigungslehre, Ballistik und Taktik, die man mit ihr vereinigte. So hatte die Ritterakademie in Wolfenbüttel wöchentlich vier Stunden Mathematik.

Die Reform des Unterrichts in der französischen Revolution.

Von der größten Bedeutung für das Unterrichtswesen ist die französische Revolution gewesen. Sie beseitigte den Gedanken einer besonderen Ausbildung des Adels und hob gerade die bürgerliche Erziehung hervor. Vorher waren alle bürgerlichen Lehranstalten, auch die Universitäten, bestimmt, Diener des Adels und der Fürsten zu erziehen. Die Geistlichen stehen in Abhängigkeit von dem Grundherrn, die Lehrer, auch die Lehrer der Gymnasien, gar noch in demütigender Abhängigkeit von der Gemeinde, sie müssen durch eine Art Bettel ihr Dasein fristen. Michaelis wundert sich deshalb 1768 über den „rauhen Vorsatz" einiger Studierenden, aus der Lehrtätigkeit ihren Lebensberuf zu machen. Die gelehrten Berufe sind wenig angesehen, nur die zu höheren Stellungen aufgestiegenen Juristen und Kameralisten bilden vielleicht eine Ausnahme, sie sind aber immer, da der Herrscher absolut ist, Diener der Fürsten. Darin schaffte das aus der französischen Revolution erwachsene Weltreich Napoleons fast in ganz Europa einen Wandel. Die bürgerliche höhere Schule und die an sie anschließende Universitätsbildung wird der Weg zu den höchsten Ämtern im Staate und zum gesellschaftlichen Ansehen. Neben der auf körperliche Tüchtigkeit und höfische Manieren den größten Wert legenden ritterlichen Erziehung und der aus der Scholastik herausgewachsenen Gelehrtenbildung, neben dem rein geistigen, abstrakt theoretischen Bildungswesen der Universitäten erhebt sich die technische Schulung als eine gleichwertige Form der Bildung.

Gründung der École polytechnique.

An die Stelle des ritterlich erzogenen tritt in Frankreich der technisch gebildete Offizier. Darin liegt die große Bedeutung der polytechnischen Schule in Paris, die ein rechtes Kind der Revolution ist, wenn sie auch in der 1746 zu Paris entstandenen École des Ponts et Chaussées und der 1747 gegründeten Kriegsschule in Mézières in gewissem Sinne ihre Vorläufer hat. Sie entstand als eine Zentralschule der öffentlichen Arbeiten. Es ist bezeichnend, daß zu ihren Gunsten das kurz vorher erlassene Gesetz, das jedem Adligen das Betreten von Paris verbot, zurückgenommen wurde. Der Adel gewinnt seine Existenzberechtigung wieder, wenn er sich den Forderungen der bürgerlichen Erziehung fügt. Die Schule sah ursprünglich eine dreijährige Ausbildungszeit vor. Die technische Wissenschaft erschien dabei unter merkwürdigen ma-

thematischen Namen und in mathematischer Form. So sehr herrschte der Gedanke, daß das, was die Technik zur Wissenschaft erhebe, die Mathematik sei. Dies liegt zum großen Teil auch daran, daß der für die Neugründung am meisten tätige Mann, Gaspard Monge, ein Mathematiker war. Ihm erschien gerade die selbständige Verwendung der Mathematik in Verbindung mit den Naturwissenschaften das beste Mittel zu liefern, um einen entscheidenden Fortschritt in der Technik zu erzielen. Er erkannte klar, daß durch das Aufkommen der Maschinen die Bedingungen der technischen Produktion vollständig verändert waren. „Man muß", sagt er selbst, „unseren Technikern die Kenntnis der technischen Verfahren und der Maschinen übermitteln, deren Zweck darin besteht, die Handarbeit zu verringern oder dem Arbeitsprodukt eine größere Gleichmäßigkeit und Präzision zu geben." Wie aber auf streng wissenschaftlichen Grundsätzen sich die Konstruktion der Maschinen aufbauen ließ, war in jener Zeit noch nicht im einzelnen erkannt. Es war daher nur natürlich, daß den Leuten, die sich den technischen Aufgaben zuwandten, zunächst in möglichster Vollständigkeit die Kenntnisse mitgeteilt wurden, die ihnen dienlich sein konnten, und ihnen dann überlassen blieb, wie sie sie verwenden wollten. So kam es, daß die mathematischen und naturwissenschaftlichen Elemente mit dem technischen Wissen eng verschmolzen wurden. Als mathematische Analysis wurde im ersten Jahr die analytische Geometrie des Raumes, im zweiten Jahr die Mechanik fester und flüssiger Körper, im dritten Jahr die Maschinenlehre gebracht, als darstellende Geometrie im ersten Jahr nach den rein mathematischen Partien die Lehre vom Steinschnitt und den Holzkonstruktionen, im zweiten die Aufgaben der Architektur, im dritten Anwendungen auf das Befestigungswesen. Schon im zweiten Jahre ihres Bestehens aber wurde die polytechnische Schule auf zwei Jahre beschränkt und sollte nur der allgemeinen wissenschaftlichen Vorbereitung auf die technischen Berufe dienen, während die technische Ausbildung selbst den verschiedenen Écoles d'Application, der Bauschule, der Bergbauschule, der Ingenieurschule und der Artillerieschule vorbehalten blieb. Diese Organisation hat sich bis heute gehalten.

Aus diesen Anfängen heraus ist heute eine mächtige technische Wissenschaft erwachsen. Dabei sind die praktischen Aufgaben der Technik so stark hervorgetreten, daß die Techniker die Mathematik, die in ihrem Fache steckt, vielfach gar nicht mehr als solche empfinden. Trotzdem ist sie im Verein mit den Naturwissenschaften die Quelle, aus der die wissenschaftliche Begründung und damit die hohe Ausbildung der Technik geflossen ist und deren Versiegen auch diese zum Austrocknen bringen würde.

VII. Der mathematische Unterricht in Deutschland während des 19. Jahrhunderts.

Vom 19. Jahrhundert ab ist es nicht mehr möglich, in einem Strom die europäische Bildung zu verfolgen, einerseits weil uns die Zeit so nahe ist, daß wir die einzelnen Züge nationaler Besonderheit deutlicher bemerken, anderseits aber auch, weil, je reicher sich die Bildung entfaltet, um so mehr die

nationalen Eigentümlichkeiten hervortreten. Wir wollen daher von nun an die Darstellung fest an die deutschen Verhältnisse knüpfen und insbesondere die Entwicklung in Preußen verfolgen, die für die Gestaltung der Verhältnisse in den übrigen deutschen Staaten fortwährend von entscheidender Bedeutung gewesen ist.

Hervorkehren einer deutschen Nationalbildung.

Am Ende des 18. Jahrhunderts zündete die französische Revolution der Welt eine Fackel an, die weithin leuchtete. Wenn vorher schon die französische Bildung die Kultur aller Länder beherrschte und nur in England einen ruhigen, aber gefährlichen Konkurrenten fand, so zwang die Napoleonische Herrschaft fast ganz Europa in ihre Gewalt und fand wiederum nur an dem britischen Inselreich einen hartnäckigen Widerstand. So scheint der Einfluß Frankreichs auf das Bildungswesen des ganzen europäischen Festlandes zu Beginn des 19. Jahrhunderts stärker als je. Aber gerade in dieser Zeit ist bei uns in Deutschland das Bewußtsein für eine spezifisch deutsche Bildung erwachsen, eine Bildung, die sich freihält von den Einwirkungen fremder Nationen ihrer eigenen Zeit, aber dafür zurücktaucht in die Vergangenheit, die bei den Griechen und Römern die Quellen des geistigen Lebens sucht und aus der Vertiefung in die Entwicklung des eigenen Volkes das Verständnis für die Eigenart des deutschen Wesens gewinnen will. Die humanistische und die romantische Richtung laufen in diesen Erziehungsbestrebungen parallel, gemeinsam ist ihnen der Gegensatz gegen die realistische Tendenz des französischen Bildungswesens. Nicht die gemeine Erfahrung kann die Grundlage einer höheren Geistesbildung sein, sondern nur die literarischen Denkmäler und das spekulative Denken. Dieser Anschauungsweise liegt das Festhalten an der überlieferten Religion näher als der die Bande der Tradition zerreißenden französischen Aufklärung, und da diese die Erforschung der Natur auf ihre Fahnen geschrieben hatte, kamen die Naturwissenschaften in Deutschland in den Geruch der Gottlosigkeit, den sie in gewissen Kreisen heute noch nicht verloren haben. Ebenso wie sie aber von den konservativen Parteien ferngehalten wurden, sahen sich alle radikalen Bestrebungen zu ihnen hingedrängt. Auch Männer, die von ganz anderen Ideen ausgegangen waren, ich brauche nur an Ludwig Feuerbach und David Friedrich Strauß zu erinnern, wurden zu einer Anlehnung an die Naturwissenschaften getrieben. Dieser Gegensatz, bei dem auf der einen Seite die philologisch-historischen, auf der anderen die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer stehen und die eine Seite viel mehr die offizielle Würdigung findet als die andere, ist fortan typisch für unser deutsches Vaterland.

Entwicklung der philosophischen Fakultät.

Gegen das Ende des 18. Jahrhunderts erfolgt ferner eine Entwicklung der Universitäten, die für die Geschichte der Wissenschaften von der größten Bedeutung geworden ist und die sich als die Emanzipation der vierten Fakultät charakterisieren läßt. Während diese vorher in Abhängigkeit von den übrigen Fakultäten, insbesondere der theologischen stand, tritt sie nun als gleichberechtigt den anderen an die Seite, erwirbt das Recht der Doktorpromotion und erhält in der Ausbildung der Lehrer für die höheren Schulen eine bestimmte Aufgabe. Dafür nimmt ihre Bedeutung als eine all-

gemeine wissenschaftliche Propädeutik ab. Mehr und mehr dringt die Ansicht durch, daß die allgemeine Bildung mit dem Gymnasium abgeschlossen sein müßte, wenn auch die Forderung des Besuches bestimmter Vorlesungen der philosophischen Fakultät zu allgemein bildenden Zwecken noch eine Zeitlang aufrechterhalten wurde; so wurde noch längere Zeit von den Juristen der Besuch einer mathematischen Vorlesung verlangt.

Einfluß der Philologie.

Diese Entwicklung der philosophischen Fakultät geht von den philologischen Fächern aus, die ein selbständiges, reiches Leben entfalten, und steht in engem Zusammenhang mit der Bewegung, die wir als Neuhumanismus bezeichnen und die sich in der mit der geistigen Entwicklung unseres Volkes erwachenden Begeisterung für das Hellenentum kundgibt. In sozialer Hinsicht ist die Bewegung bedingt durch die Erstarkung des Bürgertums, dessen steigender Wohlstand die Möglichkeit einer weiteren und tieferen Bildung des einzelnen gewährte und ein neues Bildungsideal an die Stelle der höfischen Gesittung setzte. Dieses Bildungsideal glaubte man in den Schriften der Griechen zu finden. Die romantische Bewegung brachte außerdem, gerade nachdem in der deutschen Literatur das Höchste geleistet worden war, ein eifriges Studium der fremden Literaturen mit sich. Dieses mächtig anschwellende Interesse für die Sprachen und Schriftwerke aller Zeiten und Völker, auch der deutschen Vergangenheit, fuhr nun wie ein belebender Frühlingswind durch die in dem Bann der Überlieferung festgefrorenen Universitäten. Die jungen Leute, die die Hörsäle füllten, suchten nicht bloß mehr ein paar mehr oder oberflächliche Kenntnisse zu erhaschen oder den Vortrag eines guten Redners an ihrem Ohr vorüberrauschen zu lassen, sie suchten voll Begeisterung einzudringen in den Geist vergangener Zeiten, sie wollten selbständig mitwirken an ihrer Erschließung und Durchforschung.

Loslösung des Lehrerberufes von der Theologie.

Mit diesem veränderten Lehrbetrieb in den philosophischen Fakultäten unserer Universitäten, der den Studierenden nicht bloß in die Resultate, sondern auch in die Methoden der wissenschaftlichen Arbeit einführte, steht in Verbindung die Loslösung des Lehrerberufes vom theologischen Studium, die ihren Ausdruck in der Schaffung einer bestimmten Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen fand. Diese Prüfung wurde in Preußen durch das Edikt vom 12. Juli 1810 angeordnet. Durch sie wurde das Lehrfach der Mathematik den übrigen Lehrfächern als gleichwertig an die Seite gestellt, und der Mathematiklehrer, gegen dessen Anerkennung als gleichberechtigten Kollegen sich die philologischen Lehrer, weil sie ihn als einen Fachlehrer ansahen, heftig sträubten, empfing dadurch die Stütze der öffentlichen Anerkennung. Es wurde aber durch diese Verfügung natürlich keineswegs erst der Stand des Mathematiklehrers geschaffen. So war Ernst Gottfried Fischer, der viel für die Ausbildung eines mit modernem Geiste angefüllten Mathematik- und Physikunterrichtes getan hat, bereits seit 1787 als Lehrer der Physik und Mathematik am Gymnasium des grauen Klosters in Berlin angestellt.

Einfluß der napoleonischen Zeit auf die Ausgestaltung unserer Schulen.

Auf den mathematischen Unterricht in Deutschland hat auch nicht wenig das französische Beispiel gewirkt. Die Mathematik hatte in der Revolutionszeit

auch äußerlich eine Machtstellung erlangt, wie sie nie zuvor besaß und wie sie vielleicht auch nie wieder haben wird. Berufsmathematiker wie Monge, Carnot, Fourier und Laplace nahmen führende Stellungen im Staatsleben ein, und in Napoleon selbst steckte ein großes Stück mathematischer Schulung Die ungewöhnlich hohe Einschätzung der Mathematik in dem Napoleonischen Staatswesen mußte daher stark auf die Stellung einwirken, die ihr von da an überhaupt in der Kulturwelt, und so auch an den deutschen Schulen, eingeräumt wurde. Wir müssen bedenken, daß damals ein großer Teil von Deutschland unter französischer Herrschaft stand und auch der Rest sehr stark dem politischen Einfluß Frankreichs unterlag. In den von Frankreich unmittelbar oder mittelbar beherrschten Ländern suchte man das Bildungswesen möglichst nach französischem Muster zu organisieren. Aber auch die übrigen Landesteile trachteten danach, es den Franzosen in der Ausgestaltung des Unterrichtswesens gleichzutun. Die praktischen Vorzüge des von ihnen organisierten naturwissenschaftlich-technischen Bildungswesens lagen auf der Hand. Nicht mit Unrecht schrieb man die französischen Waffenerfolge zum Teil der überlegenen militär-technischen Schulung zu, die ganz von diesem praktischen Geiste getragen war. So erklärt es sich, daß ein Mann wie Scharnhorst auch einer gründlichen mathematischen Ausbildung das Wort redete. Ähnlich waren Alexander von Humboldt und der Freiherr von Stein gestimmt. Überhaupt bedeutet hinsichtlich des Bildungswesens die Zeit des äußeren Niederganges für uns keinen Stillstand, sondern im Gegenteil einen kräftigen Fortschritt. Sehr stark sprach hierbei mit, daß man „an geistigen Gütern wieder zu gewinnen suchte, was an äußerer Macht verloren gegangen war". Daher die energischen Ansätze zur Hebung und Neugestaltung des Unterrichtswesens in Preußen. Es wurden die Universitäten Berlin und Breslau gegründet, der Organisation der höheren Schulen und der Ausbildung der Gymnasiallehrer wurde eine feste Grundlage gegeben, die die Gewähr einer kräftigen Neuentwicklung bot.

National deutsche Elemente in der Entwicklung des Bildungswesens.

Für diese Neugestaltung kam aber noch ein anderes Moment in Betracht, das wir nicht unterschätzen dürfen. Das rege geistige Leben, das die friderizianische Zeit in Berlin entfacht hatte, hatte auch im Schulwesen seinen Ausdruck gefunden. In Berlin hatte Hecker schon 1747 seine ökonomisch-mathematische Realschule errichtet. In Berlin hatten Männer wie Gedike und Meierotto an der Ausbildung eines modernen Gymnasiums gearbeitet, und die von ihnen geschaffenen Musterschulen, das Friedrichwerdersche Gymnasium, das Graue Kloster und das Joachimsthalsche Gymnasium wurden maßgebend für die allgemeine Umgestaltung der höheren Schulen. So beruht trotz des Antriebes, der durch die Fremdherrschaft kam, die Entwicklung unseres höheren Schulwesens doch zum größten Teil auf dem geistigen Aufschwung, den die deutsche Kultur aus sich heraus genommen hatte, ein Aufschwung, der in der Hochblüte unserer Literatur ja seinen deutlichen Ausdruck findet. Diese national deutsche Entwicklung zeigt sogar eine tiefgreifende Verschiedenheit von der französischen Auffassung. Während nämlich die französische Bildung wesentlich nach der realistischen Seite hinneigt,

ist die neuhumanistische Bewegung in Deutschland den realistischen Interessen fremd, ja feindlich. Der Gegensatz zwischen Realismus und Humanismus, der von nun an unser Bildungswesen durchzieht, wurde häufig geradezu so empfunden, daß er ein nationaler Gegensatz von französischer und deutscher Denkweise sein sollte.

Das Ideal der formalen Bildung.

Es bildet sich mit aller Schärfe der Gedanke der formalen Bildung aus, der von da ab unser ganzes höheres Schulwesen im schroffen Gegensatz gegen die realistische Auffassung, die während des 18. Jahrhunderts aufkam und sich z. B. in der Basedowschen Richtung ausspricht, dauernd beherrscht. Man kann den Wandel der Anschauungen deutlich an Gedike beobachten Früher hatte er den Gedanken einer realistischen Auffassung des klassischen Altertums entschieden verfochten, er hatte an seiner Schule die realistischen Fächer aus dem Gedanken heraus, daß etwas für das Leben Nützliches zu lernen die Hauptsache sei, kräftig betont und in einer organischen Verbindung des Sach- und Sprachunterrichtes die Aufgabe der höheren Schulen gesehen. Er hatte sogar noch 1796 am Grauen Kloster eine Art Realabteilung eingeführt, indem er einen Teil der Schüler in Mathematik, Naturwissenschaft, Technologie und Handelswissenschaft besonders unterrichten ließ und dafür vom Griechischen dispensierte. Im Jahre 1802 aber vertritt er entschieden den Standpunkt der rein formalen Bildung. Er vergleicht die geistige Bildung mit der körperlichen Gewandtheit und Geschmeidigkeit, welche der Unterricht in der Tanzkunst gibt. Ebensowenig man das Tanzen lehrt, damit einer sein Leben hindurch sich auf dem Tanzboden bewegt, ebensowenig erwartet man, daß die Lehrgegenstände der höheren Schulen im späteren Leben praktische Verwendung finden sollten; nur der durch sie erreichte geistige Drill soll sich dem Menschen nützlich erweisen.

Es ist indessen der Gedanke der formalen Bildung keineswegs gegen Ende des 18. Jahrhunderts erst entstanden und aufgekommen. Im Gegenteil liegt er dem Humanismus von Anfang an zugrunde und es heißt z. B. in der braunschweigisch-lüneburgischen Schulordnung von 1737: „Wer die Alten lieset und dabei die Gründe von der Mathematik studiert, bekommt geübte Sinne, das Wahre von dem Falschen, das Schöne von dem Unförmlichen zu unterscheiden, allerhand schöne Gedanken in das Gedächtnis und Fertigkeit, anderer Gedanken zu fassen und die seinigen geschickt zu sagen, eine Menge von guten Maximen, die den Verstand und Willen bessern, und hat den größten Teil dessen schon in der Ausführung gelernt, was ihm in einem guten Kompendium der Philosophie nach Ordnung und Form einer Disziplin gesagt werden kann“. Das sind so klar, wie man nur verlangen kann, die Gedanken einer formalen Schulung des Geistes. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts gewinnen diese Gedanken nur an Kraft, eben weil sie sich gegen eine nüchterne Nützlichkeitsphilosophie durchsetzen müssen, weil der Idealismus, die reine Begeisterung für das Schöne und Gute, gegenüber dem an der sinnfälligen Erscheinung und dem sinnlichen Genießen haftenden theoretischen und ethischen Materialismus gewaltig emporlodert.

Wie eng diese Anschauung mit der ganzen Entwicklung unserer geistigen Kultur zusammenhängt, können wir an Herder erkennen, den wir hierin wohl als den Wortführer des Weimarer Kreises ansehen dürfen. Er hat den Gedanken der formalen Schulung in seinen Schulreden klar und scharf zum Ausdruck gebracht. „Ein Gleiches“, sagt er im Jahre 1786, „ist’s mit der Auswahl der Wissenschaften für die Jugend, obgleich eben dieser Punkt für den schwersten angegeben zu werden pflegt. Man sagt: Was für diesen taugt, taugt nicht für jenen, und es ist wahr, sobald man sich auf die künftige Bestimmung jedes einzelnen Jünglings einläßt. Allein wenn man darauf sehen wollte, sollten statt einer sieben Schulen und statt sechs oder sieben armer Lehrer dreißig da sein, wenn man so vornehm und edel Schulen für Juristen und Kuchenbäcker, für Kameralisten und Leinweber haben wollte. Die öffentliche Schule ist ein Institut des Staates, also eine Pflanzschule für junge Leute nicht nur als künftige Bürger des Staates, sondern auch und vorzüglich als Menschen. Menschen sind wir eher, als wir Professionisten werden, und wehe uns, wenn wir nicht auch in unserem künftigen Beruf Menschen blieben! Von dem, was wir als Menschen wissen und als Jünglinge gelernt haben, kommt unsere schönste Bildung und Brauchbarkeit für uns selbst her, noch ohne zu ängstliche Rücksicht, was der Staat aus uns machen wolle. Ich halte es also für sehr töricht, wenn man bei jedem Schulbuch, bei einem Äsopus und Phädrus, beim Cornelius und Anakreon oder gar bei einzelnen Teilen einer Arbeit, bei einem Quadrat und Zirkel, bei einer Periode der Geschichte oder einer Aufgabe des Stils die Frage aufstellte: cui bono? Zu keinem anderen bono, als daß der Knabe reden und schreiben, seinen Verstand, seine Zunge, seine Feder brauchen lerne oder daß sein Geschmack gereinigt, sein Urteil geschärft und er gewahr werde, daß in seiner Brust ein Herz schlage. Nachher mag er Lehrsatz und Fabel, Geschichte und Gedicht vergessen, wenn und wie er will, genug, er hat an und mit ihnen, was er sollte, gelernt“.

Herder.

Diese Äußerungen, die sich dem einseitigen Nützlichkeitsgedanken widersetzen, können wir gewiß gutheißen. Schiller hat ihnen vielleicht den besten Ausdruck gegeben mit den Worten: „Stoff ohne Form ist nur ein halber Besitz, denn die herrlichsten Kenntnisse liegen in einem Kopf, der ihnen keine Gestalt zu geben weiß, wie tote Schätze vergraben. Form ohne Stoff hingegen ist gar nur der Schatten eines Besitzes, und alle Kunstfertigkeit im Ausdruck kann demjenigen nichts helfen, der nichts auszudrücken hat“ (Über die notwendigen Grenzen beim Gebrauch schöner Formen, 1795).

Schiller.

Am Anfang des 19. Jahrhunderts tritt aber gegen den Nützlichkeitsgeist der Aufklärung eine noch viel radikalere Reaktion ein, die sich, noch durch den nationalen Gegensatz gegen die französischen Eroberer verstärkt, in einem Manne wie Fichte greifbar verkörpert. Formale Bildung des Geistes ist nicht das einzige, was erstrebt wird, es soll sich die formale Geistesübung auch allein auf das Gebiet des Geistes beschränken. Es entsteht ein Abscheu vor allem, was irgendwie den Verdacht erweckt, eine reale Nützlichkeit in sich zu schließen. Darum tritt das Wort in einer Weise der Sache gegenüber wieder

Wortkultur.

hervor, die uns zurückversetzt in die Blütezeit des Scholastizismus. Die Sprache der Griechen und Römer wird nicht sowohl der Gedanken wegen geschätzt, die in ihr ausgedrückt sind, sondern rein als Sprache. Die lateinische und griechische Grammatik, nicht die lateinischen und griechischen Schriftsteller sollen den Unterricht beherrschen. Wenn früher in der philanthropinischen Schule der Unterricht mit Anschauungsübungen begonnen wurde, so soll er jetzt mit Auswendiglernen begonnen werden. Ob das Kind das versteht, was es lernt, ist gleichgültig, sein Gedächtnis soll geübt werden, die gelernten Sätze sollen sich in der Tiefe seines Geistes festsetzen, aus der sie später schon von selbst zur rechten Zeit hervortauchen werden, wie ein vom Kinde ohne Verständnis auswendig gelernter Bibelvers später dem gereiften Manne im Augenblick der Not wieder ins Gedächtnis tritt und ihm Trost und Stärkung gibt.

Die Schulen Veranstaltungen des Staates.

Für das rechte Verständnis des modernen deutschen Schulwesens ist noch andererseits von der größten Bedeutung der Umstand, daß der Staat die Leitung des Schulwesens in die Hand nimmt, daß die Schule nicht, wie das früher war und heute noch so in England ist, frei im Lehren und Lernen bleibt, sondern bestimmten staatlichen Vorschriften über die Ausgestaltung des Lehrplans, die Handhabung des Unterrichtes und die Vorbildung der Lehrer unterliegt und unter der ständigen Beaufsichtigung der Regierung steht. Diese Verhältnisse gehen aus den allgemeinen Bedingungen, unter denen sich die deutschen Staaten, insbesondere Preußen, entwickelt haben, mit Notwendigkeit hervor. „Der preußische Staat, nicht wie England von Hause aus in gegebene Naturgrenzen gefaßt, ist von kleinen Anfängen her das Produkt jahrhundertelanger, harter gemeinsamer Arbeit von Fürst und Volk, zu der dieses mit erzogen werden mußte. Um das unter ungünstigen Naturbedingungen Gegebene zusammenzuhalten, zu erweitern, zu kräftigen, bedurfte es einer schlagfertigen Militärmacht nach außen und fester Ordnungen im Innern, und zu deren Aufrechterhaltung zuverlässiger Beamten. So ist die Entstehung des in sich geschlossenen, straffen preußischen Verwaltungssystems und der damit zusammenhängenden drei allgemeinen Pflichten, der Schul-, Militär- und Steuerpflicht, leicht erkennbar. Der Staat bediente sich früh der Schulen, um das heranwachsende Geschlecht für seine Zwecke zu erziehen und für sein Beamtentum vorzubilden, und zu Ende des 18. Jahrhunderts faßte er in der Gesetzgebung des allgemeinen Landrechts, unbekümmert um den Ursprung und die erste Bestimmung der verschiedenen Anstalten, alle als ihm zugehörig zusammen und machte sich selbst zum alleinigen Schulherrn: »Schulen sind Veranstaltungen des Staates«. Die Einheit des preußischen Schulwesens ist die Folge der absoluten monarchischen Regierung“ (Wiese, Deutsche Briefe über englische Erziehung, 1851).

Das Abiturientenexamen.

Den höheren Schulen wurde eine neue feste Grundlage gegeben durch die Neuordnung des Abiturientenexamens am 12. Oktober 1812, die dem Einführungsedikt vom 23. Dezember 1788 erst eine weitergehende Bedeutung gab. Das Examen hatte aber keineswegs von vornherein den Sinn, den es

heute hat. Im Gegenteil herrschte der Gedanke, daß die Entscheidung, ob ein junger Mensch für die Universität reif sei oder nicht, nicht dem Staat, sondern den Eltern oder dem Vormund zustehe und die freie Wahl hierin nicht beschränkt werden dürfe. Den im Abiturientenexamen untüchtig Befundenen wird nur der Rat erteilt, die Universität nicht zu beziehen. Die Nichtabiturienten werden einem Examen pro immatriculatione unterworfen, das sehr milde gehandhabt worden zu sein scheint. Es wird z. B. nur verlangt, der Prüfling müsse wenigstens in einem Fache Primareife besitzen, um zur Prüfung zugelassen zu werden. Erst im Jahre 1834 wird den Nichtabiturienten der Zugang zur Universität verschlossen. Aus diesem Jahre stammt ein neues Reglement für die Abiturientenprüfung, das sie wesentlich erschwert und sechs Prüfungsarbeiten, einen lateinischen und einen deutschen Aufsatz, eine lateinische und eine griechische Übersetzung, endlich eine französische und eine mathematische Arbeit fordert. 1812 wird beim Abiturientenexamen in der Mathematik gefordert: „die Kenntnis der Rechnungen des gemeinen Lebens nach ihren auf die Proportionslehre gegründeten Prinzipien, des Algorithmus der Buchstaben, der ersten Lehre von den Potenzen und Wurzeln, der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, der Logarithmen, der Elementargeometrie (soweit sie in den sechs ersten und dem elften und zwölften Buche des Euklid vorgetragen wird), der ebenen Trigonometrie und des Gebrauchs der mathematischen Tafeln“. Im großen und ganzen sind das die bis zum heutigen Tage stehen gebliebenen Forderungen, im Gegensatz zur Physik, wo nur die Erkenntnis der Gesetze derjenigen Hauptphänomene der Körperwelt verlangt wurde, ohne welche die Lehren der Mathematik und der physikalischen Geographie nicht begriffen werden können. Die übrigen Naturwissenschaften kommen überhaupt nicht in Frage. Die Mathematik nimmt also den Naturwissenschaften gegenüber entschieden eine begünstigte Stellung ein. Den Grund dafür kann man zunächst in dem der Mathematik zugeschriebenen besonderen formalen Bildungswert sehen, vielleicht ist auch die Wertschätzung maßgebend gewesen, die das als Muster aller feinen Bildung angesehene Hellenentum der Mathematik zuschrieb.

Stellung der Mathematik im Examen.

Wie wenig Wert jedoch tatsächlich beim Maturitätsexamen auf die Mathematik gelegt wurde, zeigen deutlich die einzelnen uns erhaltenen Abgangszeugnisse. Ein solches lautet in einem Falle so: „N. N. hat im Griechischen und Lateinischen einen beträchtlichen Grad von Fertigkeit erlangt, nicht allein in der Lesung der Schrift selber, sondern auch im Schreiben vorzüglich des Lateinischen, worin er es bis zu einer leichten und fehlerlosen Versifikation gebracht hat. Seine Geschichtskenntnisse dagegen sind unzusammenhängend und unchronologisch, in der Mathematik ist er sehr zurückgeblieben. Sein deutscher Ausdruck ist zu wenig in der Prose gebildet, daher er leicht in Bombast ausartet. Von groben Fehlern des Stils ist er indessen frei. Im Französischen ist er nicht bis zur grammatischen Richtigkeit gekommen und hat eine fehlerhafte Aussprache.“ Worauf es ankam, waren doch schließlich allein die alten Sprachen. Die Übung im Schmieden lateinischer Verse galt mehr

Probe eines Abiturientenzeugnisses.

als der richtige und vernünftige Gebrauch der eigenen Muttersprache. Gerade darin sah man den Gewinn, daß man zu dem Entlegenen griff und nicht bei dem Naheliegenden und praktisch Verwertbaren stehen blieb, obwohl der Schluß doch wohl etwas bedenklich scheint, daß etwas pädagogisch um so wertvoller ist, je weniger es praktisch nutzbar gemacht werden kann.

Der Wortlaut der Bestimmungen für das Abiturientenexamen läßt deutlich erkennen, daß es wesentlich die Euklidischen Elemente und die Eulersche Algebra gewesen sind, die für die Festlegung des Unterrichts maßgebend waren. Von Euklid wurden nur die geometrischen Bücher berücksichtigt, die arithmetischen wurden als veraltet beiseite gelassen, obwohl sie, wenn man von der geometrischen Form der Darstellung und der Enge des Interessenbereiches der griechischen Arithmetik absieht, exakter und gründlicher als das Eulersche Verfahren sind.

Euklid wurde in deutschen Übersetzungen auch unmittelbar als Lehrbuch benutzt. Es ist dies der Zustand des mathematischen Unterrichts, der sich in England bis auf den heutigen Tag erhalten hat, wie überhaupt das englische Schulwesen eine auffallende Ähnlichkeit mit dem deutschen Schulwesen am Beginn des 19. Jahrhunderts, vor dem Eintreten der festen staatlichen Organisation, zeigt. Es rühmt sich dieser Freiheit, zu lehren und zu lernen, was man will, und hält sie aufrecht trotz aller Mängel (insbesondere des Eindrillens der Prüfungsaufgaben für die nicht zu vermeidenden staatlichen Examina), welche sie im Gefolge hat. Das im ganzen auf einem sehr niedrigen Niveau stehende Zulassungsexamen zur Universität, das uns an den früheren deutschen Zuständen so befremdlich erscheint, findet sich ebenfalls heute noch in England.

Aufgabensammlungen: Meier Hirsch.

Für die Entwicklung der arithmetischen Seite des mathematischen Schulunterrichts in Deutschland hat eine große Bedeutung die Aufgabensammlung von Meier Hirsch erlangt, die zuerst 1804 erschienen ist. Sie ist das Vorbild für alle späteren Aufgabensammlungen bis in unser Jahrhundert hinein gewesen und gibt den klarsten und deutlichsten Begriff von dem Zustand des mathematischen Unterrichts am Anfang des 19. Jahrhunderts. Der Verfasser ist selbst kein staatlich angestellter Lehrer, sondern Privatlehrer der Mathematik in Berlin gewesen und hat die Aufgabensammlung nach den Erfahrungen bei seiner Lehrtätigkeit gestaltet. Zu ihm kamen aber jedenfalls Leute, die entweder ein besonderes Interesse für die Mathematik hatten oder sie als Hilfswissenschaft zu ihrem Beruf brauchten. Das hat den Zustand der Sammlung wesentlich bestimmt. Sie ist so gehalten, daß sie für einen Berufsmathematiker eine zweckmäßige Einführung in sein Fach bedeutet. Die Stoffanordnung ist wesentlich dieselbe wie in Eulers Algebra, nur ist (wohl durch Hindenburgs Einfluß) die Kombinatorik hinzugetreten. So wird der Schüler in den grundlegenden Operationen geübt; nur um das Interesse zu beleben und nützliche Übungen zu gewinnen, wird auch auf Anwendungen eingegangen, die aber in diesem Falle nichts bedeuten wie mit Begriffen aus dem praktischen Leben gebildete theoretische Beispiele. So ist auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung weniger aus praktischem Interesse als zur Einübung

der Kombinatorik aufgenommen. Alles dies ist für den Zweck einer Vorbereitung auf die theoretische Mathematik zweckmäßig und gerechtfertigt. Aber sollte man es glauben, daß man dieselben Gesichtspunkte ohne weiteres auch auf die allgemeinen Schulen übertragen hat, wo es sich doch gewiß nicht darum handelt, künftige Mathematiker auszubilden? So unwahrscheinlich und ungereimt es klingt, der mathematische Schulunterricht ist fast hundert Jahre lang so gehandhabt worden, als ob alle Schüler später Mathematik studieren wollten. Die später gebräuchlichen Aufgabensammlungen — ich will nur die von Heis und von Bardey nennen — richten sich nicht bloß in dem Inhalte, sondern auch in der Methodik ganz nach Meier Hirsch. Nur die Belebung durch die Einflechtung geschichtlicher Gesichtspunkte ist bei Heis hinzugekommen.

Die Meier-Hirsch'sche Aufgabensammlung gibt wohl einen guten Maßstab für die Art, aber nicht auch für den Umfang des mathematischen Unterrichts zur Zeit ihres Erscheinens. Dieser mußte sich vielmehr erst allmählich entwickeln und ausgestalten, schon weil es vorerst an geeigneten Lehrkräften gebrach. Die gesetzlichen Bestimmungen allein können keinen zuverlässigen Maßstab für den wirklichen Unterricht abgeben. Auch der berühmte Süvernsche Lehrplan (1812) sollte keineswegs verbindlich, sondern nur ein Muster für die Grundlinien der Lehrverfassung sein. In der Einführung der vier Hauptfächer Lateinisch, Griechisch, Deutsch und Mathematik hat er allerdings dauernd Geltung behalten. Eine moderne Fremdsprache sieht er nicht vor. In den zehn Schuljahren, die er fordert, sollen auf die vier Hauptfächer insgesamt folgende Anzahl von Wochenstunden entfallen: Lateinisch 76, Griechisch 56, Deutsch 44, Mathematik 60, und zwar in jedem Schuljahr sechs Wochenstunden. Treibend ist bei dieser gleichmäßigen Betonung verschiedenartiger Lehrgegenstände der Gedanke einer inneren Verwandtschaft des Organismus aller Wissenschaft; durch die gleichmäßige Teilnahme an allen soll die harmonische Ausbildung des Geistes gesichert werden. Wie weit der Mathematikunterricht gehen sollte, zeigen die folgenden Angaben: in Quinta sollte Algebra und Geometrie begonnen werden, in Quarta sollten dann die einfachen algebraischen Gleichungen und die Geometrie nach dem sechsten, elften und zwölften Buche des Euklid, also die Ähnlichkeitslehre und Stereometrie behandelt werden. In Tertia sollten darauf die Logarithmen und die analytische Geometrie kommen. Die geometrischen Konstruktionen sollten als zu zeitraubend wegfallen. Der Sekunda waren die Reihen, die ebene und sphärische Trigonometrie, sowie die Lehre von den Kegelschnitten vorbehalten. In der Prima sollte endlich die Ausbildung mit den Gleichungen dritten und vierten Grades, der unbestimmten Analytik, der Fortführung der Reihenlehre bis zum Taylorschen Lehrsatz und der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren Abschluß finden.

Der Süvernsche Lehrplan.

Die wirkliche Ausgestaltung des Stundenplans ist wenigstens an den preußischen Gymnasien von Anfang an dieselbe gewesen, die sie das ganze 19. Jahrhundert hindurch geblieben ist. Die Mathematik ist mit vier, die Physik mit

zwei Wochenstunden bedacht. Zum Teil wurde auch von den Lehrern, die mit Eifer und Begeisterung an das neue Fach herangingen, recht viel durchgenommen und verlangt. Es treten deswegen schon bald Mahnungen auf, den Mathematikunterricht so zu gestalten, daß auch die mittelbegabten Schüler folgen können. So wird z. B. für die Provinz Brandenburg 1829 angeordnet: „Wir machen es (gegenüber Versuchen, über das Geforderte hinauszugehen) zur unerläßlichen Pflicht, daß nicht etwa nur der eine oder andere Schüler, sondern mindestens die Mehrzahl der Scholaren dem Lehrer weiter hinaus zu folgen imstande sei und daß der Lehrer sich in der Überzeugung erhalte, daß seine Schüler ihm im klarsten Bewußtsein des Vorgetragenen gefolgt sind.“ Die Forderung, den Unterricht in den Grenzen der allgemeinen Verständlichkeit zu halten, ist gerade bei der Mathematik besonders schwerwiegend. Für jeden Lehrer liegt die Versuchung nur zu nahe, sich durch den Lerneifer einiger begabter Schüler und den Wunsch, möglichst viel von seiner Wissenschaft mitzuteilen, fortreißen zu lassen. Wenn aber so die Mehrzahl der Schüler, wie es häufig geschehen ist, hilflos zurückbleibt, so ist der Zweck des Unterrichts verfehlt. Die Anpassung der Mathematik an das Fassungsvermögen der mathematisch nicht begabten Schüler bedeutet ein besonderes Problem. Die Äußerung mancher Lehrer, daß es eine eigentliche mathematische Begabung nicht gebe, sondern jeder Mensch die ganze Mathematik zu verstehen imstande sei, ist einigermaßen skeptisch aufzufassen. Die Schlußweise und Problemstellung der wissenschaftlichen Mathematik erfordert ein Verständnis, wie es der Mehrzahl der Schüler einer allgemeinen Schule gewöhnlich nicht gegeben ist. Der Lehrer verwechselt nur zu leicht die durch die Lösung einer Menge von Aufgaben erreichte mechanische Übung mit dem wirklichen Verständnis der mathematischen Prozesse.

Gegen übertriebene Anforderungen in der Mathematik.

Die Stimmung der maßgebenden Kreise ist in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts der Mathematik trotz des starken Interesses für das klassische Altertum im allgemeinen günstig. Die als Äußerung Johannes Schulzes viel angeführten Worte „In einer Zeile des Cornelius Nepos steckt mehr Bildungswert als in der gesamten Mathematik“ stehen nicht in Einklang mit der Stellung, die dieser Mann sonst dem Unterricht der höheren Schulen gegenüber eingenommen hat. Er hat mit Entschiedenheit immer betont, daß gerade die vielseitige Ausbildung des Geistes, die durch die Aufnahme der verschiedenen Lehrfächer erreicht wird, die Gewähr für seine Erhebung über die platte Alltäglichkeit liefert. Es ist der Gedanke, den schon in einem Programm von 1815 A. F. Bernhardi unter der Überschrift „Mathematik und Sprachen, Gegensatz und Ergänzung“ ausgesprochen hatte. Gewiß, sagt er, besteht ein Gegensatz zwischen der mathematisch-naturwissenschaftlichen und der philologisch-historischen Auffassung. Aber gerade dadurch, daß diese beiden Seiten der Geistestätigkeit im Schulunterricht gleichmäßig berücksichtigt werden, werden alle Fähigkeiten des Schülers harmonisch ausgebildet. In demselben Sinne heißt es in dem von Joh. Schulze herrührenden Zirkularreskript vom 24. Oktober 1837: „Die Lehrgegenstände in den Gymnasien, namentlich die deutsche, lateinische und grie-

Universalistische Tendenz der maßgebenden Kreise.

chische Sprache, die Religionslehre, die philosophische Propädeutik, die Mathematik nebst Physik und Naturbeschreibung, die Geschichte und Geographie, sowie die technischen Fertigkeiten des Schreibens, Zeichnens und Singens, und zwar in der ordnungsmäßigen, dem jugendlichen Alter angemessenen Stufenfolge und in dem Verhältnisse, worin sie in den verschiedenen Klassen gelehrt werden, machen die Grundlage jeder höheren Bildung aus und stehen zu dem Zweck des Gymnasiums in einem ebenso natürlichen als notwendigen Zusammenhange. Sie sind nicht willkürlich zusammengehäuft, vielmehr haben sie sich im Laufe von Jahrhunderten als Glieder eines lebendigen Organismus entfaltet."

Von einer engherzigen Auffassung der vorgesetzten Behörde in den Angelegenheiten der höheren Schulen kann also keine Rede sein. Der Unterricht war denn auch seit der Neugründung der Gymnasien in einer rasch aufsteigenden Entwicklung begriffen, was um so leichter möglich war, als die Scheu, den Schülern zuviel Arbeit zuzumuten, damals noch nicht so ausgebildet war wie heute, wenn auch die Klagen über Überbürdung schon Ende der zwanziger Jahre auftauchen. Die Entwicklung bewegte sich aber in einer bestimmten Richtung, die durch den Zeitgeist mit Notwendigkeit gegeben war. Die Grundstimmung jener Zeit zeigt sich in der Abkehr von der Wirklichkeit und ihrer unmittelbaren Erfassung in Leben und Schaffen, in einer mit Absicht gesuchten Weltfremdheit, die sich in der damaligen Kunst und Literatur deutlich ausprägt, und in einer Hinneigung zur abstrakten Ideengestaltung, für welche die Hegelsche Philosophie den zusammenfassenden Ausdruck findet. Nicht die Beherrschung des materiellen Lebens, sondern seine Unterdrückung galt als das Zeichen höherer Geistesbildung. Die politischen und wirtschaftlichen Ideale waren zurückgetreten, und für das, was man in der Wirklichkeit nicht fand, suchte man Ersatz im Reiche der Gedanken. Diese Stimmung fand durch unsere klassische Dichtung kräftige Unterstützung; besonders Schiller hat ihr ja fortwährend Ausdruck verliehen. Überhaupt ist das blutleere Ideenleben wohl durch die Zurückdrängung der politischen Betätigung und die schweren Hungerjahre nach den Befreiungskriegen genährt worden, aber keineswegs durch sie entstanden. Es findet sich schon am Ausgang des 18. Jahrhunderts. An die Stelle des sorglosen Genußlebens und der frischen, unbefangenen Erfassung der Umwelt tritt ein Versenken in mystische Grübeleien, ein Zurückweichen zu dem örtlich und zeitlich Fernen, das begeisterte Preisen des Griechentums, das man doch nur durch die Brille einer spekulativen Vergeistigung ansah und für dessen sinnenfrohe Unmittelbarkeit das innere Verständnis fehlte. Was würden die alten Griechen selbst wohl zu den bleichwangigen Schulmännern gesagt haben, die ihr Lob begeistert von den Kathedern herab verkündigten? Die Gründung aller Bildung auf das klassische Altertum wurde auch von den Universitäten, welche doch die Allgemeinheit der Wissenschaften vertreten sollten, offiziell gutgeheißen. So verkünden in Berlin Rektor und Senat 1818: „Die ganze wissenschaftliche Bildung der neueren Zeit ist auf das Studium des Altertums gegründet, von welchem sie sich nur zu ihrem Verderb trennen kann".

Abwendung von der Wirklichkeit.

Stimmen für die Mathematik. Bessel (1784—1846).

Wie frei und unvoreingenommen klingen dagegen die Worte, die der Astronom Bessel 1828 an von Schön richtet: „Bildung des Geistes kann durch jedes ernste wissenschaftliche Studium erlangt werden. Die Philologen, sofern sie es wirklich sind, besitzen sie, allein der Grund der Behauptung, daß sie nur durch das Studium der griechischen und lateinischen Sprache gefunden werden könne, ist nicht erwiesen; die Griechen könnten in den Dingen, welche einer Fortbildung fähig sind, hundertmal mehr von uns lernen, als wir von ihnen, ich meine im großen Reich der Wahrheit, der Mathematik, und dem ebenso großen Reich der Beobachtung, der Natur. Die Zeit will mehr als griechisch und lateinisch; die Schulmänner sind ihr nachzugeben gezwungen worden, sie haben den Sprachen etwas Mathematik zugesellt. Ob es ihnen damit ernst war, oder ob es nur geschah, daß ein Schein erzeugt, die lateinische und griechische Sprache aber gerettet würde, kann man beurteilen, wenn man die bessere Rolle der Sprachen mit der wirklich traurigen der Wissenschaft (der realistischen Fächer) vergleicht." Wenn dies Urteil vielleicht schon etwas hart ist, so sind die folgenden Worte nur ein subjektives Bekenntnis Bessels: „Es läßt sich in der Tat beides nicht vereinigen; unsere lateinischen Schulen können nicht wissenschaftliche werden. Wird dem Lernenden die Natur eröffnet und ihm die Mathematik als Führerin gegeben, so ist nicht abzusehen, wo er unfreundlich zurückgestoßen werden könnte." Ein Studium des Lateinischen will aber Bessel noch gelten lassen, „weil viel Gutes in dieser Sprache geschrieben ist und ferner geschrieben werden muß, damit es überall gelesen werden könne". Man kann diese Ansicht verstehen aus Bessels eigenem Entwicklungsgang, der selbst auf dem Gymnasium nur bis zu den mittleren Klassen vorgedrungen ist und sich die ihm fehlenden Kenntnisse im Lateinischen später bloß des praktischen Zweckes wegen angeeignet hat.

Herbart (1776—1841).

Mit Bessels Ansichten in gewisser Weise verwandt ist die Anschauung, die Herbart vom mathematischen Unterricht gehabt hat. Er hat in drei Punkten die künftige Entwicklung vorausgeahnt, einmal in der Verbindung des mathematischen Unterrichts mit der Physik, sodann in der Hervorkehrung des Funktionsbegriffes und schließlich in der Anknüpfung der mathematischen Belehrung an die tägliche Erfahrung und die Werkarbeit des Schülers. „Figuren aus Holz und Pappe", meint er, „Zeichnungen, Stifte, Stangen, biegsame Drähte, Fäden, der Gebrauch des Lineals, des Zirkels, des Winkelmessers, gezähltes Geld, alles das soll die Grundlage der beginnenden mathematischen Unterweisung bilden. Daraus sollen geordnete Beschäftigungen und Übungen entnommen werden." Herbart betont, daß sinnliche Vorstellungen in gehöriger Stärke die sicherste Grundlage für einen Unterricht ausmachen müssen, dessen guter Erfolg abhängig ist von der Art, wie der Zögling die Vorstellungen des Räumlichen innerlich bildet. Er berührt sich damit nicht nur mit der Pestalozzischen Schule, sondern auch mit Männern wie Traugott Müller. Soviel wie möglich, meint er, soll sich der Schüler jede mathematische Kenntnis erst erarbeiten, er soll erkennen, was und wieviel

man durch Mathematik vermag. In der Tat ist die größte Schwierigkeit beim mathematischen Unterricht nicht die, die Beweise verständlich zu machen, sondern den Schülern den Sinn und die Bedeutung der einzelnen Sätze klarzulegen. Deswegen befürwortet Herbart überall den Anschluß an die Erfahrung, damit die mathematischen Studien Eingang in den Gedankenkreis der Zöglinge gewinnen. „Auch der gründlichste mathematische Unterricht", sagt er, „zeigt sich unpädagogisch, sobald er eine abgesonderte Vorstellungsmasse für sich allein bildet, indem er dann entweder auf den persönlichen Wert des Menschen wenig Einfluß erlangt oder noch öfter dem baldigen Vergessen anheimfällt." Schon 1802 hatte Herbart geäußert, die Mathematik müsse soviel wie möglich sprechen und tun wie die übrigen Fächer und von der Künstlichkeit des Schulwissens zur Natur zurückführen, nicht aber neue Gezwungenheiten und steife Manieren mit sich bringen.

Herbart sagt, es sei das erste Gesetz des Vortrages, die mathematische Einbildungskraft nicht zu vernachlässigen, sie früh an vollständiges und rasches Durchlaufen des ganzen Continuums, das unter einem allgemeinen Begriff enthalten ist, zu gewöhnen. Hieraus folgt, daß man schon beim ersten Anfange die Größen so viel wie möglich als fließend betrachten lehren soll. Dadurch wird man das Bedürfnis nach der gesamten Mathematik aufregen. Mit dieser Hineinziehung der veränderlichen Größen und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, d. h. des Funktionsbegriffes, setzte sich Herbart in Widerspruch mit dem, was lange Zeit als eine Grundbedingung des elementaren Mathematikunterrichtes galt. Er hebt aber nicht ohne Grund hervor, daß eine rechte Auffassung der Logarithmen und der trigonometrischen Funktionen ohne ein solches Eingehen auf die Abhängigkeit veränderlicher Größen voneinander unmöglich sei. Diese Abhängigkeit zeigt sich auch überall in der Physik, ja vielfach ist die Aufsuchung des funktionalen Zusammenhanges physikalischer Größen als die eigentliche Aufgabe aller physikalischen Wissenschaft hingestellt worden. Herbart befürwortet deshalb dringend ein Zusammengehen der Physik mit der Mathematik, aber nicht so, daß die Physik in die Form der mathematischen Abstraktion hineingepreßt wird, sondern daß umgekehrt die mathematischen Begriffe sich an der Betrachtung der Natur bilden und beleben. Die Bedeutung der Mathematik werde am besten klargelegt, wenn man zeigt, wie überall in der Natur die Regellosigkeit und Unklarheit entwich, wo man die Erscheinungen auf Maß und Zahl zurückführte.

Das klassische Altertum als Grundlage christlicher Erziehung.

Gerade diese Ansicht steht aber in schroffem Gegensatz zu der herrschenden Meinung jener Zeit. Es ist eine Zeit, in der gegenüber dem aufgeklärten 18. Jahrhundert die energischsten Versuche gemacht wurden, im Verein mit den staatserhaltenden Tendenzen auch die positive Religion neu zu stärken. Die geistigen Anschauungen der Reaktionszeit fanden deshalb in der klassischen Bildung, so eifrig sie sie aufnahmen, doch einen Anstoß, der erst überwunden werden mußte. Die Griechen und Römer waren Heiden; wie können sie die Grundlage für eine christliche Erziehung bilden? Aus dieser Schwierigkeit half man sich durch einen eigentümlichen Gedankengang heraus. Das klassische

Altertum sollte aufgefaßt werden als ein unbewußtes Drängen und Sehnen nach dem Christentum. Der ganze Unterricht sollte sich so auf den christlichen Glauben hinwenden, in ihm seine feste Stütze und in der Erziehung einer durch edle Geistesbildung geklärten Frömmigkeit wie die Gymnasien der alten Humanisten sein Endziel finden. Die erste Forderung, die man an die anzustellenden Lehrer richtete, war Festigkeit im Glauben. Um einen Unterrichtsgegenstand zu diskreditieren, genügte es, ihn als einen Feind des Christentums hinzustellen.

Widerstreit gegen den Utilitarismus.

Daher der Widerstreit gegen allen Utilitarismus. „Welchen ärgeren Feind hat die christliche Bildung als die ausschließliche Richtung der Geister auf das Handgreifliche, auf den Bedarf des sinnlichen Lebens, der vom Materialismus ausgeht und im Materialismus endet?“ ruft z. B. Landfermann wehklagend aus. Ähnlich sagt Thiersch in dem Bericht Über den gegenwärtigen Stand des öffentlichen Unterrichts in den westlichen Staaten (1838): „Nicht zu verkennen ist, daß infolge der Stärke und Unwiderstehlichkeit, mit welcher das Gegenwärtige, Greifbare, Meß- und Zählbare und die daran geknüpften Herrlichkeiten die Gemüter einnehmen, diese sich von den idealen Gütern abgewendet haben. Daher die steigende Gleichgültigkeit gegen die Lehren und Ansichten der positiven Religion, welche schon die Wurzel derselben bedroht und in nicht wenigen Gemütern in Widerwillen und Haß übergegangen ist.“

Die Mathematik als gottlos und vaterlandsfeindlich verschrien.

So begegnete der mathematische Unterricht einem eigentümlichen Widerstand. Er galt als gottlos und revolutionär, und wegen der Wertschätzung, die er in Frankreich genoß, auch als vaterlandsfeindlich. Den Mathematikern wurde ein der christlichen Demut widerstreitender Wissenshochmut vorgeworfen. So berichtet z. B. Günther (Die Realschulen und der Materialismus, Halle 1839): „Den Mathematikern ist in neuerer Zeit, jedoch nicht härter als in älterer, Stolz und Hochmut vorgeworfen worden. Der Stolz der Mathematik ist aber teils ein theoretischer, teils ein praktischer. Der praktische Stolz gründet sich auf die Brauchbarkeit zunächst der Mathematik und dann der Mathematiker. Wie brauchbar aber die Mathematiker gewesen sein sollen, mag man aus dem Anteil sehen, den ihnen Herr von Halle an der Revolution zuschreibt: «Über den Mißbrauch und die absurde Anwendung der Mathematik auf Gegenstände, worüber sie nichts zu entscheiden hat, ließe sich ein unterhaltendes und lehrreiches Büchlein schreiben. Die ganze Revolution würde die Materialien dazu liefern; man sieht überall, daß sie von Mathematikern ausgebrütet worden ist, die nur Zahlen und Größen im Kopfe haben, aber sich wenig um die Gerechtigkeit kümmern» (Restauration der Staatswissenschaften, Bd. V, S. 263).“

Gegenüber der allgemeinen Geistesrichtung der Zeit, die in der Beschäftigung mit der lateinischen und griechischen Sprache das Wesen der höheren Bildung sieht, erheben sich nur vereinzelt Stimmen, die eine abweichende Ansicht äußern. Wir müssen noch betonen, daß keineswegs fortgesetzt in dem Sinne eines Goethe oder Herder die alten Sprachen gelehrt wurden. Das Interesse an dem Inhalte der Dichtungen trat bei der sich immer mehr steigernden Sucht nach formalem Drill zurück gegen die Pflege der Sprache,

insbesondere der Grammatik. Die Verfechter des Formalismus bezeichnen die Vernachlässigung der Grammatik als unmoralisch und ruchlos. Der alte Schulspruch gelangt wieder zu Ehren: Catechismus facit miracula in ecclesia, grammatica in schola, und die Vergleichung von Katechismus und Grammatik ist nicht eine zufällige.

Abnehmende Wertschätzung der Mathematik unter den Gebildeten.

Die formalistische Richtung des Schulwesens ist an sich der Mathematik keineswegs ungünstig, im Gegenteil steckt in dem Schematismus der mathematischen Entwicklung eine gewisse Verwandtschaft mit dem Geist der Grammatik. Aber im Publikum erwächst mit dem Beginn des 19. Jahrhunderts aus der vorwiegenden Beschäftigung mit der Literatur ein Widerstand gegen die Nüchternheit und Mühseligkeit der mathematischen Ableitung. Die Gefühlsbildung, die in der vorwiegenden Pflege der Kunst liegt, ist der reinen Verstandeskultur der exakten Wissenschaften feindlich und fühlt sich in schroffem Gegensatz zu ihr.

Es ist bekannt, wie bei Goethe dieses Widerstreben durchbricht, wie er in seiner Farbenlehre mit großer Heftigkeit gegen diese die Unmittelbarkeit der sinnlichen Wahrnehmung zersetzende Forschung zu Felde zieht. Hatte das 18. Jahrhundert die Unvoreingenommenheit und Klarheit des mathematischen Denkens allgemein anerkannt und bewundert, so wird unter der Herrschaft der literarisch ästhetischen Neigungen im 19. Jahrhundert die Mathematik von dem großen Publikum als eine kahle und unfruchtbare Region des menschlichen Wissens angesehen.

Die formalistische Richtung des Schulunterrichtes ist zu begreifen aus dem Geist der Zeit heraus. Es ist nicht bloß die Zeit des Rückwärtsschauens in vergangene Epochen, es ist auch die Zeit der höchsten Verehrung für das theoretische Wissen, das frei ist von aller praktischen Beziehung. Und doch bringt das 19. Jahrhundert eben der Mathematik eine so gewaltige Entwicklung, wie sie vorher nur geahnt werden konnte. Es ist zunächst Frankreich, das die Führung übernimmt und auf dem in der Revolutionszeit gelegten Grunde weiterbaut. Neben den großen Mathematikern der früheren Epoche Lagrange, Laplace, Legendre u. a. erhebt sich besonders die mathematische Physik; Fresnel bewältigt die Erscheinungen des Lichts zum erstenmal vollständig durch die Kraft der mathematischen Analyse, Ampère in ähnlicher Weise die elektrischen und magnetischen Vorgänge, die molekulare Struktur der Materie und die darauf gegründeten Eigenschaften der Festigkeit, Elastizität, Kohäsion und Adhäsion werden durch Männer wie Cauchy, Poisson, Navier, de St Venant analysiert, Poncelet und Coriolis begründen die technische Mechanik, die Geometrie schreitet unter den Händen eines Carnot, Monge, Poncelet, Gergonne, Brianchon, Dandelin, Bobillier, Dupin, Hachette, Chasles rasch und gewaltig fort und Cauchy stellt die Analysis auf eine neue Grundlage. In dem Mittelpunkt der Forschungsarbeit aber steht der Lehrbetrieb der polytechnischen Schule. Eine Reihe der wichtigsten Werke sind aus Vorlesungen, die an ihr gehalten sind, hervorgegangen, das Journal de l'école polytechnique enthält die schönsten und wichtigsten mathematischen Arbeiten.

Aufschwung der wissenschaftlichen Mathematik in Frankreich.

Aufkommende Pflege der wissenschaftlichen Mathematik in Deutschland: A. L. Crelle.

Es ist das große Verdienst des preußischen Oberbaurats A. L. Crelle, diese machtvolle Entwicklung richtig erkannt und für die deutschen Verhältnisse nutzbar gemacht zu haben. Crelle gründete 1827 nach französischem Muster „unter tätiger Förderung königlich preußischer Behörden“ sein Journal für die reine und angewandte Mathematik und gab damit der mathematischen Forschung in Deutschland eine feste Grundlage, er redete auch einer Ausbreitung der wissenschaftlichen Mathematik im Unterricht unermüdlich das Wort. Für diese Bestrebungen war es ein großes Glück, daß um dieselbe Zeit Alexander von Humboldt von Paris nach Berlin übersiedelte und, selbst ganz und gar mit den französischen Ideen erfüllt, mit seinem großen Einfluß die Bemühungen Crelles unterstützte. Die Lehrstühle der Universitäten wurden um diese Zeit mit wirklich wissenschaftlichen, oft blutjungen Persönlichkeiten besetzt. So kam Jacobi nach Königsberg, Dirichlet von Breslau zurück nach Berlin, Plücker nach Bonn, Steiner erhielt in Berlin wenigstens ein Extraordinariat, die Berufung des großen Norwegers Abel scheiterte an seinem vorzeitigen Hinscheiden. Derart begann ein anderer Geist im mathematischen Lehrbetrieb der Universitäten einzuziehen, und es fingen in dieser Zeit denn auch die mathematischen Vorlesungen an, auf die mathematische Forschungsarbeit überzugreifen, es begannen die Dozenten ihre eigenen Untersuchungen vorzutragen.

C. G. J. Jacobi.

Vor allen anderen war es Jacobi, der diesen veränderten Lehrbetrieb einführte. Während er nach seiner Berufung an die Königsberger Universität 1826 zuerst mit recht elementaren Vorlesungen begann, wagte er es 1831, seine Untersuchungen über die elliptischen Transzendenten in einer achtstündigen Sommervorlesung vorzutragen. Wie er von da ab seine mathematischen Vorlesungen gehandhabt hat, geht am besten aus den Worten seines Kollegen Dirichlet hervor, der selbst in Jacobis Sinne gewirkt hat: „Es war nicht seine Sache, Fertiges und Überliefertes von neuem zu überliefern; seine Vorlesungen bewegten sich sämtlich außerhalb des Gebietes der Lehrbücher und umfaßten nur diejenigen Teile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hieß bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechslung. Seine Vorträge zeichneten sich nicht durch diejenige Deutlichkeit aus, welche auch der geistigen Armut oft zuteil wird, sondern durch eine Klarheit höherer Art. Er suchte vor allem die leitenden Gedanken, welche jeder Theorie zugrunde liegen, darzustellen, und indem er alles, was den Schein der Künstlichkeit an sich trug, entfernte, entwickelte sich die Lösung der Probleme so naturgemäß vor seinen Zuhörern, daß diese ähnliches zu schaffen können die Hoffnung haben durften. Wie er die schwierigsten Gegenstände zu behandeln wußte, konnte er seine Zuhörer mit Recht durch die Versicherung ermutigen, daß sie in seinen Vorlesungen sich nur ganz einfache Gedanken anzueignen haben würden“. Jacobi hat den wissenschaftlichen Idealismus, der sein Wirken als Universitätslehrer erfüllt, selbst dahin ausgesprochen, daß die Entdeckung einer mathematischen Wahrheit denselben Wert besitze wie eine große technische Erfindung, daß der Grad der Nützlichkeit keinen Maßstab liefere für den Wert einer geistigen Leistung. Er tadelt es an den französischen Mathematikern, daß sie ihre

Forschungen an den physikalischen Problemen orientierten. Seine Anschauungen erfuhren eine gewisse Wandlung durch eine Reise nach Paris, die mit dem Projekt der Einrichtung einer polytechnischen Schule in Preußen zusammenhängt. Von da ab redet er auch der Bedeutung der Mathematik für die praktische Ausbildung eifrig das Wort: „Außerdem daß das vertraute Umgehen mit Zirkel und Lineal und die sorgfältige Ausführung der geometrischen Konstruktionen den Sinn und das Interesse für strenge Richtigkeit weckt und schärft und dadurch zu jeder besonderen Kunst tüchtiger macht, kann eine so vielen Künsten und Gewerken gemeinschaftliche Grundlage dazu beitragen, die gegenseitige Entfremdung der verschiedenen Handwerke, die doch zu demselben Ganzen zusammenzuwirken haben, in etwas zu verringern“ (Vorrede zu Busch, Vorschule der darstellenden Geometrie, 1846). Seine Stellung dem mathematischen Schulunterricht gegenüber geht klar aus den Worten hervor: „Die Strenge der geometrischen Beweise ist eine Erfindung der Griechen, welche dem menschlichen Verstande nur zur höchsten Ehre gereicht. Aber sie ist nur dem reiferen Knaben- und angehenden Jünglingsalter eine passende Nahrung, und dann nebst der Grammatik eine wahre Zucht des Verstandes. Dem Knaben, dem diese Welt der geometrischen Formen noch eine gänzlich fremde ist, mit den ersten Vorstellungen, die man ihm davon überliefert, zugleich schon zuzumuten, sich darin in der Weise folgerichtigen Denkens nach systematischem Fortschritt zu bewegen, scheint keine gute Pädagogik.“ Für die geometrische Propädeutik empfiehlt Jacobi dann die Entwicklung der Anschauung, das Gewöhnen an das Erfassen der geometrischen Formen und Proportionen, wie es Pestalozzi erstrebte, aber „aus Mangel an geometrischen Kenntnissen nicht durchführen konnte, so daß seine Methode in mechanischen Übungen nach einem leeren Schematismus verflatterte“. Hier hat auf Jacobi offenbar der Umgang mit Jacob Steiner eingewirkt, der, ein Schweizer Bauernsohn und bei Pestalozzi gebildet, gerade in der Entwicklung der geometrischen Phantasie seine Stärke hatte und in ihr die Hauptaufgabe des geometrischen Unterrichts erblickte.

Wie sehr Steiners Anschauungen auf Jacobi eingewirkt haben, dessen Begabung ursprünglich ganz in dem arithmetischen Sinn seines Stammes begründet lag, geht aus den Worten hervor, die er 1833 zur Empfehlung Steiners dem preußischen Ministerium gegenüber äußerte: „Ich bin immer der Meinung gewesen, daß, wenn diesem seltenen Talente seine rechte Stelle als ordentlicher Professor an der Berliner Universität angewiesen würde, von ihm aus eine Umgestaltung des mathematischen Wesens auf unseren Gymnasien ausgehen müßte, das jetzt geeigneter ist, den Geist zu töten als den Verstand zu bilden und den Schülern mehr Abneigung als Liebe zu der Sache erweckt.“

Hervorkehrung des rein wissenschaftlichen Prinzips in der Lehrerausbildung.

Wenn Jacobi hier auf die Ausbildung der Lehrer noch besonders Rücksicht nimmt, so ist später diese Rücksichtnahme aus dem mathematischen Universitätsstudium immer mehr verschwunden, und es ist nicht zu leugnen, daß Jacobi, indem er die Einführung des Studierenden in die wissenschaftliche Forschungsarbeit zum Ziel seiner Lehrtätigkeit machte und so auch in Königsberg 1834

mit Franz Neumann zusammen das erste mathematische Seminar gründete, selbst viel dazu beigetragen hat, den unmittelbaren praktischen Zweck des Studiums zurückzuschieben. Diese Verleugnung der praktischen Absicht ist bei der Gründung des Berliner mathematischen Seminars durch Kummer und Weierstraß unumwunden ausgesprochen worden. Das Institut sollte ausschließlich die Förderung der mathematischen Bildung unter den Studierenden zum Zweck haben, damit künftig durch sie die mathematischen Studien erhalten, fortgepflanzt und gefördert werden möchten. Auf die praktische Ausbildung der zukünftigen Lehrer der Mathematik könnte es nur insofern von günstigem Einfluß sein, als es dazu beitragen würde, die Gründlichkeit und Klarheit der mathematischen Kenntnisse künftiger Lehrer zu fördern. Diese rein wissenschaftliche Auffassung der Lehrerausbildung findet ihre amtliche Anerkennung in der preußischen Prüfungsordnung von 1866 mit ihren berühmten, von Richelot, einem Schüler Jacobis, herrührenden Worten: „Für den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen sind nur die Kandidaten für befähigt zu erachten, die sich in der Prüfung als ausgebildete Mathematiker zeigen und in die höhere Geometrie, die höhere Analysis und die analytische Mechanik so weit eingedrungen sind, daß sie auf diesen Gebieten eigene Untersuchungen mit Erfolg anstellen können."

Gegen eine solche wissenschaftliche Ausbildung ist gewiß an sich nichts einzuwenden und das Niveau unserer höheren Schulen würde herabgedrückt werden, wenn nicht versucht würde, die Lehrer zu wissenschaftlichen Persönlichkeiten zu erziehen, aber dadurch wird die völlige Vernachlässigung des späteren Berufes bei der Ausbildung auf der Universität nicht gerechtfertigt. Die Rückwirkung der wissenschaftlichen Forschung auf die elementaren Gegenstände des Schulunterrichts ist doch nicht so unmittelbar, daß sie sich in dem Kopfe jedes Lehrers sicher und klar vollziehen könnte. In diesem Sinne sagt schon L. Wiese in seinen Lebenserinnerungen und Amtserfahrungen: „Es ist sehr zu bedauern, daß die Richtung der Mathematik auf den Universitäten den Anschluß an dasjenige, was Aufgabe der Schule ist, immer mehr aufgibt. Zwischen der Universitätswissenschaft und der Schule liegt jetzt überhaupt eine Kluft, die zuerst dem seine Studien beginnenden Jüngling viel Not macht und die zu überbrücken nachher mancher von der Universität kommende Schulamtskandidat in seinen ersten Lehrjahren nicht lernt." Diese Gesichtspunkte machten sich denn auch der Schulverwaltung selbst sehr bald bemerkbar, und wenngleich die früheren Verordnungen nicht widerrufen wurden, so wurde doch der Versuch gemacht, ihnen die Spitze, die sie gegen den praktischen Schulbetrieb richteten, abzubrechen. So heißt es in den Bemerkungen zu der Prüfungsordnung von 1886: „Die Ausbreitung mathematischer Kenntnisse und mathematischen Denkens hat an unseren höheren Schulen durch Besserung des Unterrichtsverfahrens unverkennbar gewonnen; aber noch wird eine völlige Fremdheit auf dem mathematischen Gebiete nicht mit ähnlichem Selbstvorwurfe betrachtet wie auf dem sprachlichen oder historischen Gebiete. Alles, was zur Besserung des Unterrichtes in der Elementarmathematik geschieht,

dient unmittelbar der Anerkennung der Mathematik als eines unerläßlichen Gliedes der allgemeinen Bildung; es wird daher nicht überflüssig scheinen, zu erwägen, ob und wie weit die Universität als die Bildnerin der zukünftigen Lehrer zur Erreichung dieses Zweckes beizutragen vermag." Deshalb wird ein Eingehen auf die Elementarmathematik an der Universität dringend empfohlen. Es hängt auch in der Tat an den elementaren Gegenständen eine Fülle von theoretischem Wissen, zu dessen Mitteilung die Universität der geeignete Ort wäre, statt daß der Studierende oder der an der Schule eintretende Kandidat es sich selbst aus Büchern, unvollständig und vielfach kritiklos, zusammenholen muß. Die Fähigkeit und die Zeit zu wissenschaftlichen Arbeiten bleibt den wenigsten Lehrern erhalten, dagegen müßte die Veredlung und Ausgestaltung ihres Unterrichtsstoffes ihre eigentliche Aufgabe sein. Meistens aber gehen sie in den äußeren Aufgaben des Unterrichtens unter und blicken nach der wissenschaftlichen Forschungsarbeit dann vielfach zurück wie nach einem verlorenen Paradies, dessen Erinnerung sie nur unlustig zu ihrer Lehrarbeit, unzufrieden und verbittert macht.

Entwicklung der Realschulen.

In schroffem Gegensatz zu der Geistesrichtung, deren Streben es ist, möglichst weit von der Wirklichkeit weg in die lichten Höhen der reinen Wissenschaft aufzusteigen, stehen alle die Bestrebungen, die eine Erziehung für die Wirklichkeit und durch die Wirklichkeit bezwecken, die ganze realistische Seite des Unterrichtswesens. Die Realschulen, deren Entstehung auf die Mitte des 18. Jahrhunderts zurückgeht, haben unter der einseitigen Hochschätzung der klassischen Bildung schwer zu leiden gehabt. So sehr praktische Bedürfnisse auf ihre Entwicklung hindrängten, so wenig konnten sie sich eine offizielle Geltung verschaffen, sie wurden in ihrer Rücksichtnahme auf die Forderungen der Wirklichkeit nicht bloß für untergeordnet, sondern auch für gottlos und verderbt erachtet. Der erste vielleicht, der den Gedanken einer dem humanistischen Gymnasium gleichwertigen realistischen Bildungsstätte verfocht, war C. G. Fischer mit seiner Schrift über die zweckmäßige Einrichtung der Lehranstalten für die gebildeten Stände (1806). Dagegen stand das preußische Ministerium auf dem Standpunkt, daß die Gymnasialbildung nicht bloß für die gelehrten, sondern auch für die besseren praktischen Berufe die geeignetste Vorbereitung sei. Erst 1859 wurden die Realanstalten mit Latein als Realschulen erster Ordnung den Gymnasien koordiniert und erst 1870 erhielten die Abiturienten der Realgymnasien das Recht zum Studium von Mathematik, Naturwissenschaften und neuen Sprachen. Dabei blieb es lange Zeit, auch als 1882 die drei Schulgattungen Gymnasium, Realgymnasium (ohne Griechisch) und Oberrealschule (ohne Griechisch und Latein) in ihren Abgangsprüfungen als gleichwertig anerkannt wurden. Erst die Schulkonferenz von 1900 und der auf sie folgende Allerhöchste Erlaß vom 26. November 1900 brachte ihre wirkliche Gleichstellung und gab ihnen die Möglichkeit, sich jede ihrer Besonderheit gemäß zu entwickeln.

Die Volkserziehung.

Der Bildung der höheren Stände steht die Erziehung des Volkes, der höheren Schule die Volksschule gegenüber. Die gelehrten Schulen sollen den

Jüngling auf eine wesentlich geistige Tätigkeit vorbereiten, die Elementarschulen sollen dem künftigen Arbeiter und Handwerksmann die für sein Leben und seinen Beruf nötigen allgemeinen Kenntnisse mitteilen. An den höheren Schulen kann der Idealismus einer reinen Begeisterung für das Schöne und Wahre herrschen, an den niederen Schulen waltet die Aufgabe vor, dem Schüler das mitzuteilen, was er braucht, um sich später durchhelfen zu können. In den höheren Schulen wollte man wenigstens in früherer Zeit eine Auslese der Intelligenz heranziehen, in der Volksschule soll jedes Kind einen Platz finden. In den höheren Schulen sitzt die Jugend der besser situierten Kreise, in den Volksschulen sollen die verwahrlosten, schlecht genährten, von Bildern des Elends und der Roheit umgebenen Kinder des Proletariers einen Hauch von höherer Menschlichkeit verspüren.

Den höheren Schulen hat immer das Interesse der Gebildeten gehört, die Volksschulen haben sich erst im 18. Jahrhundert mühsam emporgerungen. In den Städten bestanden sie schon länger, aber sie auf dem Lande durchzuführen, gelang erst mit vieler Mühe den vereinten Bemühungen des Staates und edler Menschenfreunde, wie des Freiherrn von Rochow. Doch blieb der Unterricht in den meisten Fällen mehr als dürftig, bestimmte Ansprüche an die Vorbildung der Lehrer konnten nicht gestellt werden und ihre Existenz war eine kümmerliche. So nützte es wenig, was über die Erziehung des Volkes gesagt und geschrieben wurde, und der Gedanke der Elementarbildung, den Basedow 1774 entwickelt hatte, kam mehr den besseren Ständen als den unteren Schichten des Volkes zugute. Wer heute von Volkserziehung spricht, dem drängt sich zunächst der Name Pestalozzi auf die Zunge. Seine Persönlichkeit, das Feuer seiner hinreißenden Beredsamkeit hat auf die Elementarbildung unserer Zeit den größten Einfluß ausgeübt. Die Grundidee in Pestalozzis Erziehungslehre ist aber mathematisch, mathematisch freilich nicht in dem Sinne einer gelehrten Disziplin, sondern im Sinne einer bestimmten Auffassung der Wirklichkeit. Das Wesen dieser Auffassung ist durch das von Pestalozzi in seiner pädagogischen Bedeutung geprägte Wort „Anschauung" gekennzeichnet. Das Wort Anschauung bedeutet eine Lieblingsidee des Aufklärungszeitalters, welches die unmittelbare Erfassung der Umwelt durch die Sinne zur Grundlage seiner ganzen Auffassungsweise machte. In diesem Sinne spielt die Anschauung in der Basedowschen Schule eine Hauptrolle. Auch Goethe hat einmal gesagt:

Pestalozzi (1746—1827).

„Anschaun, wenn es dir gelingt,
Daß es erst ins Inn're dringt,
Dann nach außen wiederkehrt,
Bist am herrlichsten belehrt."

In ähnlichem Sinne äußert Schiller: „Wenn man überlegt, wie viele Wahrheiten als innere Anschauungen längst schon lebendig wirkten, ehe die Philosophie sie demonstrierte, und wie kraftlos öfter die demonstriertesten Wahrheiten für das Gefühl und den Willen bleiben, so erkennt man, wie wichtig es für das praktische Leben ist, diesen Wink der Natur zu befolgen und die

Erkenntnisse der Wissenschaft wieder in lebendige Anschauung umzuwandeln. Nur auf diese Art ist man imstande, an den Schätzen der Weisheit auch diejenigen Anteil nehmen zu lassen, denen schon ihre Natur untersagte, den unnatürlichen Weg der Wissenschaft zu wandeln."

Was aber Pestalozzi als Anschauung bezeichnet, ist wirklich mathematische Anschauung, es bedeutet die Abstraktion der mathematischen Formen aus der uns umgebenden Welt und rückwärts die gestaltende Tätigkeit, welche die regelmäßig gebildeten Raumformen zu bestimmten Zwecken erzeugt, und nähert sich darin dem Kantischen Begriff der „reinen Anschauung". Es handelt sich um die Zurückführung des Erkennens, Ordnens und Schaffens auf die Zahl- und Maßverhältnisse. Der Sinn für die Maß- und Zahlverhältnisse sollte in dem Kinde sogar schon vor der Schulzeit durch die Erziehung der Mutter entwickelt werden. Für diese Erziehung wollte er die Grundlage durch bestimmte Lehrbücher geben. „Diese sind es", schreibt er in seiner Schrift Wie Gertrud ihre Kinder lehrt, „die den eigentlichen Ausschlag gegen den Unterrichtsunsinn unseres Zeitalters geben werden und geben müssen. Ihr Geist wird mir immer klarer. Sie müssen von den einfachsten Bestandteilen der menschlichen Erkenntnis ausgehen; sie müssen die wesentlichsten Formen aller Dinge den Kindern tief einprägen; sie müssen früh und deutlich das erste Bewußtsein der Zahl- und Maßverhältnisse in ihnen entwickeln; sie müssen ihnen über den ganzen Umfang ihres Bewußtseins und ihrer Erfahrungen Wort und Sprache geben und überall die ersten Stufen der Erkenntnisleiter, an die uns die Natur selber zu aller Kunst und zu aller Kraft führt, umfassend ausfüllen."

Leider sind aber Pestalozzis Ideen von ihm selbst nicht so durchgeführt worden, wie wir es wünschen müßten. Was bei dem Anschauungsunterricht herauskam, war zum größten Teil ein öder Formel- und Gedächtniskram. Der Unterricht hielt sich an Tabellen, in denen die Grundlagen der Maß- und Zahlverhältnisse in einer Reihe schematischer Figuren zusammengestellt waren und an denen die Kinder die Anschauung von Maß und Zahl gewinnen sollten. Alle diese Übungen sollten im übrigen nur den Unterricht im Rechnen und in der Raumlehre beginnen, ihn aber nicht ersetzen. Doch haben sie die Wirkung gehabt, daß von nun an die Geometrie auch in die niederen Schulen einzuziehen anfing, allerdings vorerst in einer Form, die wir wenig gutheißen können. Gerade den schwächsten Punkt von Pestalozzis Didaktik, die Figurentabellen, welche die Anknüpfung an die Wirklichkeit mehr hemmen als fördern, übernahmen Pestalozzis Nachfolger als den Kernpunkt des Unterrichtes. So wird eine viel ödere und schematischere Mathematik an die Volksschulen gebracht als sie an den höheren Schulen herrscht. Alle Lehrer haben dabei die deutlich ausgeprägte Ansicht, daß jede anschauliche Geometrie nur ein kläglicher Ersatz für die logische Geometrie des Euklid oder eine Vorbereitung auf diese sein könne. Was sie aber an geometrischen Kenntnissen bringen, gehört merkwürdigerweise der alten praktischen Geometrie an, die wir neben der Euklidischen Geometrie herlaufend fanden, es sind die Kenntnisse, die sich in der Überlieferung der Gewerbe von den alten Ägyptern

her durch alle Zeit erhalten hatten und sich nun wieder in der Volkserziehung niederschlugen. Von wirklicher lebendiger Anschauung erblicken wir aber leider in der Pestalozzischen Schule herzlich wenig. Karl von Raumer hat diesen Zustand mit folgenden Worten treffend gekennzeichnet: „Daß dem euklidischen demonstrativen Gang im Unterricht etwas vorausgeschickt werden müsse, Anschauliches, Einleitendes, darüber sind in unserer Zeit viele Mathematiker einig. Besonders sah man die durch Pestalozzi und seine Schule aufgekommene Formenlehre für eine Propädeutik der Geometrie an; in ihr sollte die Anschauung, in der Geometrie der Verstand vorwalten. Allein mit Körpern begann man nicht, sondern dem bis zur Karikatur getriebenen Elementarisieren gemäß mit dem Punkt. Darauf ging man zu Linien über und verlor sich in zahl- und ziellose Kombinationen. Endlich kam man zu Flächen; von Körpern war aber in der bekannten Schmidschen Formenlehre, der Vorläuferin so vieler anderen, so gut wie nicht die Rede."

K. v. Raumer (1783—1865).

Karl von Raumer hat selbst dem Gedanken, die geometrische Anschauung an Körper anzuknüpfen, durch sein ABC-Buch der Kristallkunde, das er im Jahre 1820 Pestalozzis ABC der Anschauung zur Seite stellte, Eingang verschafft. Es ist merkwürdig, aber sehr bezeichnend, daß dieser so selbstverständlich erscheinende Gedanke erst durch die Mineralogie ins Leben gerufen wurde, und noch merkwürdiger ist, daß fast ein Jahrhundert vergehen mußte, ehe er wirklich allgemeine Anerkennung fand. Denn auch heute noch gibt es Lehrer, die meinen, der Geometrieunterricht müsse mit dem Punkt anfangen, weil der Punkt bei der logischen Entwicklung der Geometrie das erste geometrische Element ist. Der weite Weg, den die Menschheit zurücklegen mußte, um zu der geometrischen Abstraktion zu gelangen und den jedes Kind in sich wiederholen muß, wenn es von der natürlichen Auffassung der Umgebung zu den mathematischen Formen fortschreiten soll, dieser ganze Weg ist beharrlich ignoriert worden. Erst die neueste Zeit hat für die Volksschulen einen von verständigem Wirklichkeitssinn erfüllten Rechen- und Raumlehreunterricht zu entwickeln begonnen. Die Volksschulpädagogik ist, gerade was Rechnen und Raumlehre betrifft, durchwogt von heftigen Kämpfen. Im Rechnen scheiden sich zwei Heerlager, je nachdem der gedankliche Prozeß des Zählens oder die Anschauung einer Menge von Dingen die Grundlage bilden soll. In der Raumlehre ist die Stellungnahme der Wirklichkeit gegenüber immer noch strittig. In der Tat ist es nicht leicht, aus der realen Umgebung des Kindes die geometrischen Formen nach festen methodischen Gesichtspunkten und in systematischer Geschlossenheit abzuleiten. Man ist sich wohl klar, daß eine Werkarbeit des Schülers helfend eingreifen kann, aber wie diese Werkarbeit zu erreichen und durchzuführen ist, steht noch dahin.

Fröbel (1782—1852).

Wir müssen hier noch einer Bewegung gedenken, welche aus Pestalozzis Ideen vielleicht das Beste und Fruchtbarste aufgegriffen hat. Es war Fröbel, der die schon von Pestalozzi gewollte Erziehung des frühen Kindesalters zu einer bestimmten Methode ausgestaltet und durch die Kindergärten in die Wirklichkeit umgesetzt hat. Auch Fröbel ist von der Mathematik herge-

kommen, er war dem Beruf nach Feldmesser, und sein Zweck ist derselbe wie der Pestalozzis: eine mathematische Vorbildung des Kindes. Diese Vorbildung wird durch Beschäftigungen erreicht, welche nichts anderes bedeuten als die spielerische Betätigung der mathematischen Abstraktion durch Bildung regelmäßiger Figuren und Gestalten. Es ist im Grunde dieselbe Tätigkeit, die in der Technik ihren ernsthaften Ausdruck findet, und der Gedanke einer pädagogischen Verwendung des Spiels, das man die spätere Erwerbstätigkeit ebenso vorbilden läßt, wie die Tiere im Spiel ihre Kämpfe um die Nahrung und gegen ihre Feinde vortäuschen, hat so einen fruchtbaren, für die ganze Erziehung wertvollen Ausdruck gefunden. Diese Spiele finden später im Arbeitsunterricht ihre natürliche Fortsetzung. Wer freilich von der vorgefaßten Meinung über die Mathematik ausgeht, daß sie in algebraischen Formeln und geometrischen Beweisen bestehen müsse, wird es befremdlich finden, daß sie schon in Spielen des kleinen Kindes wie Stäbchenlegen, Papierfalten und Ausschneiden, Modellieren aus Pappe, Ton usw. ihren Ausdruck finden soll. Diese Spiele sind aber oft mit mehr mathematischem Geiste angefüllt als die spätere Schulmathematik. Die Mathematik, die wir auf der Schule, besonders auf der Volksschule treiben, sollte nie als etwas von der Welt der Erfahrung Losgelöstes empfunden werden, sie sollte immer so behandelt werden, daß ihre Herkunft aus den Vorgängen und Gegenständen der wirklichen Welt, ebenso wie ihre Zurückführung in die Wirklichkeit durch die gestaltende Tätigkeit des gewerblichen Schaffens deutlich im Bewußtsein bleibt.

Das technische Bildungswesen

Das 19. Jahrhundert brachte einen gewaltigen Aufschwung der Technik und dementsprechend hat sich auch in Deutschland das technische Bildungswesen wesentlich im 19. Jahrhundert entwickelt. Es liegt in der Natur der Sache, daß diese Entwicklung mit den höchsten Schulgattungen begann. Die polytechnische Schule in Paris bildete den Anfang und lange Zeit auch das vielbewunderte Muster einer methodisch geleiteten technischen Ausbildung. Es folgten bald die Gründungen anderer polytechnischer Schulen, so in Prag 1801, in Wien 1815, in Karlsruhe 1825, in München 1827, Dresden 1828, Stuttgart 1829, Hannover 1831. Bei allen stand der Lehrbetrieb in Paris als Muster vor Augen. Dieser Einfluß zeigte sich deutlich in der Einrichtung eines geordneten Lehrganges von Vorlesungen und Übungen und in der Art, wie die einzelnen Fächer dabei zur Geltung kamen. Besonders in dem breiten Raum, den die darstellende Geometrie einnahm, und in der Anordnung ihres Lehrstoffes wirkten deutlich die französischen Vorbilder. Die Gründung höherer Fachschulen in Deutschland reicht aber schon ins 18. Jahrhundert zurück. Im Jahre 1765 entstand die Bergakademie in Freiberg. Friedrich der Große stiftete 1770 die Königliche Bergakademie in Berlin. Im Jahre 1775 wurde auch von dem Lyzeum in Clausthal, das seit dem 16. Jahrhundert dem Bedürfnis einer wissenschaftlichen Vorschulung der Berg- und Hüttenbeamten durch besondere Betonung des mathematischen und mechanischen Unterrichts Rechnung getragen hatte, ein besonderer Kursus für Bergbeflissene abgezweigt.

Die Hochschulen.

Im Jahre 1799 wurde die Königliche Bauakademie in Berlin gegründet, im Jahre 1821 ebendaselbst die Technische Schule, die 1827 zum Gewerbeinstitut umgewandelt wurde und ursprünglich der Vorbildung von Knaben zur Ausübung eines Handwerks diente. Nach und nach steigerte man immer weiter die Anforderungen an die Leistungen, das Alter und die Vorkenntnisse der Zöglinge. Im Jahre 1866 wurde die Anstalt zur Gewerbeakademie erhoben und im Jahre 1879 mit der Bauakademie zur technischen Hochschule vereinigt.

Die mittleren und niederen Fachschulen.

So ist hier ein allmähliches Ansteigen in der Stellung der Schule deutlich zu beobachten. Durch die hohen Ansprüche an die Vorbildung der Anwärter der höheren technischen Berufe wurde aber eine Scheidewand zwischen den höheren und mittleren Technikern aufgerichtet, und die mit dem Aufschwung unserer Industrie von den sechziger Jahren ab aufkommenden mittleren technischen Fachschulen, die Baugewerkschulen und Maschinenbauschulen, sollten dazu dienen, auch in den mittleren technischen Berufen tüchtige Kräfte heranzuziehen. Die Ausbildung der den technischen Berufen wohl anzureihenden Feldmesser und Markscheider ist heute ganz den Hochschulen zugewiesen. Dagegen sind die Navigationsschulen, in denen die Seeleute ihre theoretische Vorbildung zum Schiffsoffizier und Kapitän erhalten, im eigentlichen Sinne Mittelschulen. Diese Schulen bestanden früher größtenteils als private Unternehmungen; die erste öffentliche Navigationsschule wurde 1749 in Hamburg gegründet; 1798 bildete sich in Bremen eine Gesellschaft zur Gründung einer „Navigationsschule großen Stils". Eine sehr viel ältere Geschichte haben die niederen kaufmännischen Lehranstalten, die Handelshochschulen aber sind als besondere Gründungen sehr jungen Datums. Als ihren ersten Vorläufer müssen wir die Merkantilabteilung des Collegium Carolinum in Braunschweig ansehen. Die erste selbständige Handelshochschule wurde dagegen erst am 1. April 1898 in Leipzig gegründet.

Erst der neueren Zeit gehört auch der Gedanke der Lehrlingsschulen, der sogenannten Fortbildungsschulen, an, die neben der praktischen Lehrzeit drei bis vier Jahre hindurch besucht werden, und durch welche die Bildung und berufliche Tüchtigkeit aller unserer arbeitenden Klassen gehoben und gefestigt werden soll. Sie finden eine Art Fortführung in den Gesellenschulen, die teils eine gewisse Zeit hindurch den Besucher ganz in Anspruch nehmen, teils aber auch in Abend- und Sonntagsklassen neben der Berufsarbeit einhergehen. Sie haben die Aufgabe, auch dem einfachen Arbeiter das Aufsteigen in höhere Stellungen zu ermöglichen, und dadurch eine große soziale Bedeutung.

VIII. Die Ausgestaltung des modernen mathematischen Bildungswesens.

Das Prinzip der formalen Bildung.

Die Signatur der höheren Allgemeinbildung ist im 19. Jahrhundert, wie wir sehen, durch den Grundsatz der formalen Schulung gegeben. Da die modernen Bestrebungen meist dahin zielen, sich diesem Grundsatz zu widersetzen, haben wir uns gewöhnt, mit ihm einen tadelnden Beigeschmack zu verbinden. Darin liegt eine gewisse Ungerechtigkeit, denn es ist nicht zu leugnen, daß die auf dieser Grundlage erzielten Resultate zum Teil außerordentlich

günstige gewesen sind. Es herrschte im Unterricht ein großer Ernst und eine strenge Zucht, und gerade die Gewöhnung zur Selbstbeherrschung, zur Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit ist ein Moment, das nicht bloß zu guten äußeren Resultaten führt, sondern auch einen großen sittlichen Wert in sich schließt. Indem das Denken geschult wurde, lenkte man auch das Wollen und Handeln des Zöglings. Nur lief die Leitung nach festen Regeln und Formeln Gefahr, in Pedanterie auszuarten, außerdem lenkte das Streben nach Abstraktheit und formaler Korrektheit leicht von den Aufgaben des wirklichen Lebens ab und trug dem praktischen Sinn nicht genügend Rechnung. Die steigenden Anforderungen des praktischen Lebens sind es auch gewesen, die in unserer Zeit dem im Zeitalter der Romantik geradezu verschrieenen Utilitarismus eine steigende Bedeutung verliehen haben. Das Ideal der reinen Wissenschaftlichkeit ist heute in der Schulerziehung erschüttert und die Forderung einer Schulung für das Leben immer kräftiger hervorgetreten.

Die Mathematik hat an den höheren Schulen einen leichteren Stand, wenn sie sich auf ihren formalen Bildungswert berufen kann, als wenn sie mit dem Anspruch auftreten muß, einen realen Nutzen mit sich zu führen. Wenn sie früher auch wohl gegen die Behauptung einseitiger Philologen ankämpfen mußte, daß die Ausbildung im sprachlichen Ausdruck die unmittelbarste und wirksamste Schulung des Denkens sei, so ist es doch schwerer nachzuweisen, wie die Mathematik, die der Schüler auf dem Gymnasium lernt, später im Leben Verwendung finden kann. So ist die Stellung der Mathematik unter der Herrschaft eines formalen Bildungsideals eine nicht ungünstige gewesen; dagegen war diese für die Naturlehre wohl die unglücklichste Epoche. Es entwickelte sich die berüchtigte Kreidephysik, bei der schematische Figuren an der Tafel das wirkliche Experiment ersetzten. Das mathematische Bild der Vorgänge ist aber bei der Physik nicht der Ausgangspunkt, sondern der Zielpunkt. Es hat nur die Bedeutung, daß sich in ihm eine große Menge wirklicher Erfahrungen niederschlägt und abklärt.

Die Kreidephysik.

Bei der Bewertung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts dürfen wir jedoch nie vergessen, wie weit er mit Notwendigkeit durch die Lehrpläne bestimmt war. Diese Lehrpläne sind erst nur als allgemeine Richtlinien gedacht gewesen, allmählich ist aber immer größerer Nachdruck auf ihre strenge Innehaltung gelegt worden. Dieser steigende Zwang ist zum großen Teil der Befürchtung entsprungen, der Unterricht könne zu weit getrieben oder auf falsche Bahnen gelenkt werden. Durch diese Einschnürung ist aber das geraubt worden, was eine unerläßliche Bedingung für jeden gedeihlichen mathematischen Unterricht ist, eine gewisse Bewegungsfreiheit, die dem Lehrer gestattet, einem auftauchenden Interesse der Schüler nachzugehen, ohne in jedem Augenblicke befürchten zu müssen, sich mit bestehenden Bestimmungen in Widerspruch zu setzen. Gerade wenn man den formalen Bildungswert der Mathematik in den Vordergrund stellt, ist das Anregen der Schüler die Hauptsache und was sie im besonderen lernen dagegen Nebensache.

Lehrzwang und Lehrfreiheit.

Durch den starren Zwang der Lehrpläne kam aber in den mathematischen Schulunterricht eine gewisse Unaufrichtigkeit hinein. Man trieb die verbotenen Lehrgegenstände doch, nur unter anderem Namen und mit verkappten Methoden. Dies ist auch die Signatur der reichen Lehrtätigkeit, die Schellbach seit 1834 in Berlin entfaltet hat. Er vermeidet die Methoden der analytischen Geometrie ebenso wie die der Infinitesimalrechnung, weil sie verboten sind, behandelt dem Gegenstande nach aber doch dasselbe und bildet zu dem Zwecke ein sinnreiches, verwickeltes System aus. Die mathematische Behandlung der Physik, insbesondere der Mechanik, wurde mit Liebe und Sorgfalt gepflegt, aber statt der einheitlichen, organischen Methoden, die sich in der wissenschaftlichen Forschung seit der Zeit Leibniz' und der Bernoulli eingebürgert hatten, werden wieder die besonderen, von Fall zu Fall wechselnden Verfahren, auf die man vor der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung angewiesen war, den behördlichen Vorschriften zuliebe zu einem kunstvollen Gewebe ausgesponnen.

Baltzers Elemente der Mathematik.

Vielleicht in der größten methodischen Vollendung prägt sich der prinzipielle Standpunkt, auf dem der mathematische Unterricht an den höheren Schulen um die Mitte des 19. Jahrhunderts stand, in den „Elementen der Mathematik" von Baltzer aus, die von 1860 an erschienen sind und einen großen Einfluß auf den Unterricht gewonnen haben. Für Baltzer ist wohl weniger der Zwang bestimmter Lehrpläne, als der Gedanke einer reinlichen Scheidung von niederer und höherer Mathematik maßgebend gewesen, und das ganze Buch trägt den Stempel einer großen methodischen Klarheit. Zum Prinzip der Abgrenzung ist derselbe Gedanke verwertet, den 1864 Wittstein auf der Philologenversammlung in Hannover ausgesprochen hat, indem er der Schule die Teile der Mathematik zuwies, die sich mit beständigen Größen beschäftigen, während alles, was auf dem Begriffe des Veränderlichen beruhe, fortzulassen und der höheren Mathematik der Universitäten vorzubehalten sei. Danach geht auch Baltzer zu Werke. Er berücksichtigt die neueren mathematischen Forschungen in einer solchen Abgrenzung und Form, wie sie sich in diesen Plan einzufügen scheinen. Die durch Poncelet und Steiner begründete neuere Geometrie wird in der Art behandelt, daß nicht die gegenseitigen Beziehungen der Gesamtheiten aller Punkte, die auf einer geraden Linie oder in einer Ebene liegen, oder der Strahlen, die in einer Ebene oder im Raum durch einen Punkt gehen, in Betracht gezogen werden, sondern daß nur von den Beziehungen zwischen einer endlichen Anzahl von Punkten oder geraden Linien oder von zwei geometrischen Figuren die Rede ist. Der Koordinatenbegriff, auf den sich die analytische Geometrie gründet, wird wohl berücksichtigt, aber die systematische Betrachtung der Kurven als Ausdruck einer funktionalen Beziehung zwischen den Koordinaten wird vermieden. Mit dem Begriffe der Veränderlichen und der Funktion sind auch die Methoden der Infinitesimalrechnung ausgeschlossen. Charakteristisch ist die Behandlung der Algebra. Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra, der die Existenz der Wurzeln einer gegebenen Gleichung behauptet, muß vermieden werden, weil er nur

auf Grund des Kontinuitätsbegriffes zu beweisen ist. Daher muß die Behandlung der Algebra so vor sich gehen, daß unmittelbar die Werte der Unbekannten abgeleitet werden, die der Gleichung tatsächlich genügen. Dies gelingt auf theoretischem Wege unmittelbar bei den Gleichungen dritten und vierten Grades und bei einigen Gleichungen höheren Grades. Bei den anderen Gleichungen muß man durch praktische Annäherungsmethoden zum Ziel zu gelangen suchen.

Abgrenzung der Elementarmathematik.

Für eine solche Abtrennung der Elementarmathematik, wie sie Baltzer versucht, scheint von vornherein manches zu sprechen. Sie beruht auf der Scheidung der diskreten und kontinuierlichen Größen. Diese sind in der Tat so wesensverschieden, daß nur ein Saltomortale der Vernunft von den einen zu den anderen hinüberzuführen scheint. Wie groß die Schwierigkeit des Überganges ist, haben wir erst in der neuesten Zeit voll zu begreifen gelernt. Diese Scheidung muß in der Tat vom rein theoretischen Standpunkte aus die Mathematik in zwei getrennte Teile auseinanderreißen. Aber wenn man damit eine Scheidung nach dem Grade der Schwierigkeit begründen will, so ergibt sich etwas Unmögliches. Die moderne Zahlentheorie müßte ganz dem elementaren Teil zugewiesen werden. Dabei erweist es sich bei vielen Fragen, die hierhin gehören, z. B. der großen Aufgabe der Bestimmung der Anzahl von Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, doch wieder als unmöglich, die Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung zu vermeiden. Vollends für den Schulunterricht ist eine solche Scheidung ganz undenkbar. Es ist vielleicht unmöglich, die exakte Begründung der Kontinuität auf der Schule zu geben, aber ebenso unmöglich ist es, den Begriff der stetigen Veränderung zu vermeiden. Wie sollte man ohne ihn überhaupt die Bewegung behandeln? Auch die Fläche des Kreises, ja der Inhalt der Pyramide und alle ähnlichen Fragen lassen sich nicht, ohne die Infinitesimalmethoden in irgendeiner Form hineinzuziehen, erledigen. Die alte griechische Exhaustionsmethode des Eudoxos ist nichts anderes als eine besondere Infinitesimalmethode. Auch in ihr steckt der Grenzübergang, der das Wesen der infinitesimalen Prozesse ausmacht. So wird tatsächlich auch bei Baltzer der Prozeß des Grenzüberganges nicht vermieden, wenn er auch unter der Maske einer endlichen Größenfolge auftritt. Es ist schon durch die Flächenmessung und die Stereometrie, aber viel mehr noch die Bedürfnisse der Physik dem mathematischen Schulunterricht die unabweisbare Pflicht auferlegt, auch diese Gegenstände zu berühren, und wenn die Mathematik ihre allgemeinbildende Bedeutung wirksam zeigen soll, so kann sie es nur mit Hilfe der Begriffe der stetigen Veränderungen und ihrer gegenseitigen Abhängigkeiten tun, die das Wesentlichste bilden, was sie für die allgemeine Auffassung der Vorgänge in der Umwelt zu leisten vermag.

Abgrenzung der Schulmathematik.

Die Bestimmung des Schulstandpunktes kann demnach nicht so getroffen werden, daß alles beiseite gelassen wird, was sich von der Mathematik nicht von vornherein mit voller Strenge behandeln läßt, sondern man muß die Forderungen an die Strenge der Betrachtung anders bemessen. Strenge im mathematischen Unterricht heißt nicht, daß man alles beweist, soweit es sich

überhaupt beweisen läßt, sondern daß man klar zum Ausdruck bringt, was man bewiesen hat und was nicht. Eine Unwahrheit und Unehrlichkeit lag aber darin, daß im mathematischen Schulunterricht alle die verbotenen Begriffe behandelt wurden, ohne sie beim rechten Namen zu nennen; durch die verhüllten Definitionen und Beweise kam auch eine wirkliche Unklarheit hinein, in fast allen sogenannten elementaren Beweisen sind Ungenauigkeiten enthalten, die dem Schüler verborgen gehalten werden, indem man ihm eine völlige Exaktheit der Entwicklung vortäuscht. Darum ist es viel besser, von vornherein klar zu sagen, daß man auf der Schule nicht die Mindestzahl voneinander unabhängiger Behauptungen, aus denen alle anderen Behauptungen durch bloße logische Schlüsse folgen, erreichen kann, daß man vielmehr auch solche Sätze empirisch einführt, die in Wirklichkeit bloße Folgerungen aus anderen bereits bekannten Sätzen sind. Der ganze Standpunkt der Schulmathematik ist ein anderer wie der der wissenschaftlichen Mathematik. Wir begnügen uns mit der Stufe des Erkennens, die wir auch in der Physik haben, wo wir unbedenklich als wahr hinnehmen, was uns die Erfahrung als tatsächlich richtig zeigt. Die Mathematik, die wir auf der Schule treiben können, ist sozusagen eine physikalische Mathematik, weil sie nur die sichere Feststellung der Sätze, nicht aber die möglichst vollständige Bloßlegung ihres logischen Gefüges erstrebt. Dies läßt sich am einfachsten an dem Begriffe des Flächeninhalts erläutern. Daß eine ebene geschlossene Linie eine Fläche von bestimmtem Inhalt umgrenzt, wird auf der Schule stets als selbstverständlich hingenommen. Vom abstrakt mathematischen Standpunkt aus ist es aber keineswegs selbstverständlich. Beispielsweise wird der naiven Auffassung der Flächeninhalt des Kreises als unmittelbar gegeben erscheinen, weil dieser Flächeninhalt von dem unbefangenen Verstande nicht rein mathematisch, sondern physikalisch, etwa als die Masse oder das Gewicht einer kreisförmigen Scheibe, aufgefaßt wird.

Der Funktionsbegriff. Graphische Darstellungen.

Man kann es nun wirklich nicht für angebracht halten, über diese physikalische Auffassung auf der Schule hinauszugehen, weil sonst z. B. die Behandlung des Kreisinhaltes unter normalen Verhältnissen geradezu unmöglich werden würde. So ist man von vornherein auf einen Kompromiß angewiesen. Wenn man diesen Kompromiß aber schließt, so ist die Auffassung der mathematischen Größen als fließend und veränderlich, wie schon Herbart hervorgehoben hat, eine der lebendigsten und fruchtbarsten. Sie ist auch das, was sich auf das spätere Leben des Schülers als eine allgemeine Betrachtungsweise der Umwelt am leichtesten übertragen läßt. Die graphische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten von empirischen Größen ist, wie wir sahen, schon im 14. Jahrhundert systematisch entwickelt worden, und man hatte schon damals ihre weittragende allgemeine Bedeutung richtig erkannt, wenn auch im scholastischen Geiste nur begrifflich verfolgt. Es erscheint befremdlich, daß sie erst fünf Jahrhunderte später in die höhere Schulbildung einzuziehen beginnt. Heute freilich ist sie zu allgemeiner Anerkennung durchgedrungen und die graphischen Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten, ob sie nun aus der

Erfahrung stammen oder aus einer mathematischen Formel abgeleitet werden, nehmen in allen modernen Lehrbüchern einen breiten Raum ein.

Infinitesimalrechnung auf der Schule.

Mit der Behandlung des Funktionsbegriffes stehen in Zusammenhang die immer weiter um sich greifenden Bestrebungen, der eigentlichen Infinitesimalrechnung, der Differential- und Integralrechnung (dem „Calculus", wie die Engländer kurz sagen) an unseren Schulen, insbesondere an den Oberrealschulen, an denen der Mathematikunterricht naturgemäß viel weiter gehen kann, Eingang zu verschaffen. Die Behandlung der Infinitesimalrechnung auf der Schule wird geradezu als das Kennzeichen der Reformbewegung angesehen. Was aber einzelne übereifrige Stürmer hierin erstreben, darf nicht auf Rechnung der eigentlichen Urheber der Bewegung gesetzt werden. Nur die Infinitesimal*begriffe* gehören unbedingt an die Schule, weil sie sowohl für die Ausgestaltung des Mathematikunterrichtes fruchtbringend, wie auch für das Verständnis der physikalischen Vorgänge unentbehrlich sind. Eine Übung in der eigentlichen Infinitesimalrechnung dagegen, die über die ersten Elemente hinausgeht, kann nur für die künftigen Naturwissenschaftler und Ingenieure von Wert sein, die aber später Gelegenheit haben, sie besser und gründlicher zu lernen als das auf der Schule möglich ist. Sie würde den Mathematikunterricht in einer ungebührlichen und unmöglichen Weise belasten. Nur soviel ist nötig, daß an den einfachsten Funktionsbeispielen die Bedeutung der Begriffe und ihre Verwendung in einzelnen wichtigen Aufgaben hinreichend klar hervortritt.

Nicht um eine Ausdehnung der früheren Lehrgegenstände, sondern um ihre Umwandlung im Sinne einer engeren Beziehung zu der Wirklichkeit und den praktischen Aufgaben der Mathematik, nicht um Ergänzungskurse, die auf den früheren Unterricht aufgesetzt werden, sondern um eine durchlaufende Durchdringung des ganzen Unterrichts mit den modernen Begriffen der Mathematik, die aus ihr das wichtigste Werkzeug zur Erkenntnis und Beherrschung der Natur gemacht haben, darum handelt es sich. Diese Forderungen sind nicht willkürlich ersonnen, sie ergeben sich mit Notwendigkeit aus der Entwicklung unserer Zivilisation.

Einfluß der steigenden äußeren Kultur auf den Unterricht

Die Triebfeder zur erneuten stärkeren Betonung der Wirklichkeit der reinen Idealbildung gegenüber lag ja in der seit der Neugründung des deutschen Reiches mächtig angestiegenen äußeren Kultur. Dies zeigt sich schon in der Art, wie die ersten Ansätze zu einer Reform des mathematischen Unterrichtes aufgetreten sind. W. Gallenkamp, Direktor einer Gewerbeschule in Berlin, verlangte auf der Schulkonferenz von 1873 die Aufnahme der Elemente der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung mit der Begründung, daß nur so eine Vorstellung von der großen Kulturarbeit auf dem Gebiete der Naturwissenschaft erweckt werden könne. Es ist der Kulturgedanke, der entscheidend in den Vordergrund tritt. Die hohe Einschätzung der Naturwissenschaften war eben das erste Merkmal, durch das sich die verwandelten Anschauungen über Wesen und Wert der Kultur offenbarten. Der gleiche Gedanke wie bei Gallenkamp liegt auch der 1877 gehaltenen Rede von E. Du Bois-

Reymond zugrunde, der ebenfalls die Aufnahme der analytischen Geometrie in den Lehrplan der höheren Schulen empfahl. „Das Studium der Mathematik“, sagte er, „entfaltet seine bildende Kraft vollauf erst mit dem Übergang von den elementaren Lehren zur analytischen Geometrie. Unstreitig gewöhnt schon die einfachste Geometrie und Algebra den Geist an scharfes quantitatives Denken; die Darstellung von Funktionen in Kurven oder Flächen aber eröffnet eine neue Welt von Vorstellungen und lehrt den Gebrauch einer der fruchtbringendsten Methoden, durch welche der menschliche Geist seine eigene Leistungsfähigkeit erhöhte. Diese Art, den Zusammenhang der Dinge sich vorzustellen, ist dem Verwaltungsbeamten, dem Nationalökonomen so nützlich wie dem Physiker und Meteorologen. Vollends die Medizin kann diese Methode nicht entbehren.“ Man sieht, wie energisch der in der romantischen Epoche streng verpönte Nützlichkeitsgedanke jetzt wieder bei einem der führenden Geister, der dabei durchaus für das alte griechische Gymnasium eingenommen ist, hervortritt.

Langsame Entwicklung.

Aber alle diese Ideen blieben zunächst ohne weitergehende Wirkung. Der neue preußische Lehrplan von 1882 z. B. nahm auf sie keine Rücksicht, außer daß er zugab, von der sphärischen Trigonometrie könne soviel aufgenommen werden, als zum Verständnis der mathematischen Geographie diene, auch könnten Elemente der Lehre von den Kegelschnitten analytisch behandelt werden, wobei es selbst möglich sei, eine Vorstellung von den Differentialquotienten zu geben, nur dürfe der Schüler sich nicht einbilden, analytische Geometrie oder Differentialrechnung bereits kennen gelernt zu haben. Erst der Lehrplan von 1892 verlangte, die Schüler in den obersten Klassen in den besonders wichtigen Koordinatenbegriff einzuführen und ihnen in möglichst einfach gehaltener Darstellung einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte klarzumachen. Die eigentümliche Ansicht, daß die wesentlichste und nächstliegende Anwendung der Koordinaten die Kegelschnitte seien, ist in den Kreisen der Schulmänner immer noch verbreitet. Der Grund ist allein der, daß mit dem üblichen Festhalten an einer einmal entstandenen Gewohnheit die elementaren Lehrbücher der analytischen Geometrie sie allein behandeln. Die wirkliche Bedeutung der analytischen Geometrie für die Schule liegt aber vielmehr in der Erschließung des Funktionsbegriffes. Dieser Gesichtspunkt ist erst in den preußischen Lehrplänen von 1901 hervorgetreten, die mit der nunmehr unumwunden anerkannten Gleichberechtigung der drei Arten höherer Schulen (humanistisches Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule) zugleich herausgekommen sind, indem es heißt, daß den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffes, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekanntgeworden sind, zu erschließen ist. Hinter den Lehrplänen, die jeweils der am höchsten stehenden Auffassung entsprechen, blieb aber der Durchschnittszustand des Unterrichtes zurück. Wenn einzelne Lehrer an ihren Anstalten auch den Unterricht in fortschrittlichem Sinne gestalteten, die Wirkung davon drang nicht in weitere Kreise. Ebenso erweckten auch die zahlreichen auf die Verbesserung des mathematischen Unterrichts hinzielenden Aufsätze in den in Betracht

kommenden Zeitschriften, insbesondere der Hoffmannschen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, wohl einen gewissen Nachhall in den beteiligten Kreisen, aber sehr weit reichte ihre Wirkung auch nicht. Wichtiger war schon die Gründung eines „Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften", in dem von vornherein die Beziehung der Mathematik zur Physik bedeutungsvoll hervortrat wobei die auf der Vorversammlung in Jena 1890 hervorgetretene Forderung, der Mathematikunterricht müsse sich ganz an der Physik orientieren, bei der Tagung in Braunschweig 1891 einer maßvolleren Auffassung Platz machte. Die dort formulierten Leitsätze drücken treffend die Mehrzahl der Gesichtspunkte aus, die von nun an für die Bewegung im mathematischen Unterricht kennzeichnend sind. Sie lauten: „Die Schüler höherer Lehranstalten sind im allgemeinen noch zu wenig imstande, das Mathematische in den sich ihnen im Leben darbietenden Erscheinungen zu erkennen. Die Ursache davon ist vorzugsweise in dem Umstande zu suchen, daß die Anwendungen der mathematischen Theorien vielfach in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf Verhältnisse zu beziehen, welche sich in der Wirklichkeit darbieten. Daher muß das System der Schulmathematik von vornherein, unbeschadet seiner vollen Selbständigkeit als Unterrichtsgegenstand, im einzelnen mit Rücksicht auf die sich naturgemäß darbietende Verwendung (Physik, Chemie, Astronomie und kaufmännisches Rechnen) aufgebaut werden. Die demgemäß heranzuziehenden Beispiele sollen die Schüler in solchem Grade daran gewöhnen, in dem sinnlich Wahrnehmbaren nicht nur Qualitatives, sondern auch Quantitatives zu beobachten, daß ihnen eine solche Beobachtungsweise dauernd zum unwillkürlichen Bedürfnis wird."

Die Braunschweiger Beschlüsse.

In eine neue Phase trat die Bewegung, als F. Klein die ganze Macht seiner Persönlichkeit für eine zeitgemäße und segenbringende Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes einsetzte. Er begann mit der Arbeit für den Lehrbetrieb der Hochschulen im Sinne einer engen Fühlungnahme der rein wissenschaftlichen Ausbildung mit den Aufgaben der Praxis. Durch die Göttinger Ferienkurse 1900 und 1904 wurde die gehörige Einschätzung der „mathematischen Exekutive", die Anerkennung der Bedeutung, welche die Mathematik für die Bewältigung praktischer Aufgaben besitzt, gegenüber den überwiegenden theoretischen Interessen der Berufsmathematiker energisch betont. Die Anwendungen der Mathematik sollten nicht als etwas Zufälliges und Nebensächliches, sondern als eine zielbewußte und methodische Ausführung bestimmter Teile der mathematischen Forschung erscheinen. Ihren Ausdruck fanden diese Bestrebungen in der Schaffung eines besonderen Lehrfaches für angewandte Mathematik durch die Prüfungsordnung von 1898. Unter angewandter Mathematik wird dabei nicht eine einheitliche Wissenschaft verstanden, auch nicht, was früher darunter begriffen wurde, sondern eine Zusammenfassung von darstellender Geometrie, technischer Mechanik und Geodäsie. Besonders die Universität Göttingen hat diese angewandte Mathematik zusammen mit der angewandten Physik in hoher Vollendung ausgebildet.

Fortschreiten der Unterrichtsreform (F. Klein).

Wiederhervorkommen der „angewandten Mathematik".

Jena, Straßburg u. a. m. sind ihr nachgefolgt. Anderseits sind noch manche Widerstände zu überwinden. Auf vielen Universitäten wurde die Lehrtätigkeit in der angewandten Mathematik jüngeren Dozenten übertragen, deren wissenschaftliche Interessen bisweilen weit von diesem Gebiete ablagen. Die Schuldirektoren selbst legen Gewicht darauf, daß der Lehramtskandidat sich in möglichst verschiedenen Lehrgebieten ein Zeugnis erwirbt, damit er im Unterricht vielseitige Verwendung finden kann. Von diesem Gesichtspunkte aus erwachsen der angewandten Mathematik als besonderem Lehrfach Schwierigkeiten, da sie dazu beiträgt, den Lehrer nicht über sein engeres Gebiet hinauskommen zu lassen, und doch ist sie notwendig, wenn der Mathematiklehrer wirklich wissen soll, was er für den Unterricht braucht.

Von Rechts wegen müßte jeder Mathematiklehrer die zeichnerischen und rechnerischen Methoden beherrschen. Aber bei dem Lehrbetrieb unserer Universitäten ist dies nur möglich, wenn für ihre Beherrschung eine besondere Lehrbefähigung erteilt wird. So ist die Prüfung in der angewandten Mathematik doch unerläßlich für eine gedeihliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts. Es ist zu hoffen, daß die ihr entgegenstehenden Hemmungen mit der Zeit überwunden werden und sie sich nach jeder Seite befriedigend ausgestalten läßt. Gerade der Lehrer soll das Band gehörig kennen und schätzen, das die Mathematik mit der Wirklichkeit verknüpft, sowohl der Wirklichkeit, die wir als von unserem Willen unabhängig in der Natur erkennen, als der Wirklichkeit, die der Mensch in seinem wirtschaftlichen Leben und seiner gewerblichen Tätigkeit selbst schafft.

Die französische Unterrichtsreform.

Die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur, wie sie F. Klein zusammenfassend formuliert, hatte die französische Unterrichtsreform von 1902 geleitet.

Die zeitgemäße Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts, die bei uns in Deutschland mühsam und allmählich sich durchkämpfen mußte, ist in Frankreich viel leichter und glatter vonstatten gegangen. Die französische Ausbildung ist darin von der unseren wesentlich verschieden, daß sie zwischen Schule und Universität eine Zwischenstufe einschiebt, die eine besondere Vorbildung für den Beruf bedeutet und zu dem Bakkalaureat führt. Diese Zwischenstufe wurde 1890 auf ein Jahr „Philosophie“ oder „Elementarmathematik“ beschränkt. Im übrigen war die Schulbildung noch allen Berufen gemeinsam. Die Unterrichtsreform von 1902 brachte darauf eine weitergehende Teilung, nach einer vierjährigen Vorschule zwei vierjährige Kurse, einen humanistischer und einen realistischer Richtung, und sodann in einem darauf gesetzten zweijährigen Kursus sogar eine Vierteilung (Latein-Griechisch, Latein-Neusprachen, Latein-Naturwissenschaften, Naturwissenschaften-Neusprachen). Darauf folgt gegebenenfalls die Mathematikklasse mit acht Stunden Mathematik.

Die Unterrichtsreform wurde 1902 auf einen Schlag ausgeführt. Da sie aber von Vertretern der Wissenschaft, die dem Schulbetrieb fernstanden, aus-

geführt war, setzten sich ihr doch praktische Schwierigkeiten entgegen, welche die Schulmänner zu einem Einschreiten veranlaßten und 1905 zu neuen praktischeren Lehrplänen führten. Die leitende Idee der Reform war, den Naturwissenschaften und den lebenden Sprachen einen möglichst breiten Raum zu gewähren, damit der dem technischen oder naturwissenschaftlichen Studium sich widmende Schüler beim Verlassen der Schule in den Stand gesetzt sei, die vielfachen technischen Anwendungen, die ihm vom Anfang seiner Laufbahn an begegnen, zu verstehen und der von Tag zu Tag zunehmenden wirtschaftlichen Bewegung nicht fremd zu bleiben. Der Teilung der zwei aufeinanderfolgenden Kurse soll auch eine Verschiedenheit der Methode entsprechen, der Unterricht im ersten Kursus soll so anschaulich wie möglich sein, die wissenschaftliche Abklärung soll dann im zweiten Kursus erfolgen. So soll die Geometrie im ersten Kursus die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, der parallelen Linien usw. auf experimentellem Wege einführen, jedes neue Element soll von einer genauen Konstruktion mit Zirkel und Lineal begleitet sein, das geometrische Zeichnen tritt von Anfang an dem geometrischen Unterricht helfend zur Seite. Es wird in den realistischen Abteilungen bis zum technischen Maschinenzeichnen und den Methoden der darstellenden Geometrie durchgeführt. Die graphischen Darstellungen spielen eine wichtige Rolle. Das Eingehen auf die Infinitesimalrechnung beschränkt sich auf den Begriff des Differentialquotienten im zweiten Kursus und die Einführung des Integrals als Flächeninhalt, dessen Differentialquotient die Ordinate der ursprünglichen Kurve wird, in der Mathematikklasse.

Auf die praktische Anwendung wird, der vorwiegend theoretischen Neigung der Franzosen entsprechend, weniger Rücksicht genommen. An die Ausbildung der Sekundärschule schließt sich noch die Klasse der Mathématiques spéciales, die z. B. den Übergang zur Pariser polytechnischen Schule vermittelt; der Lehrstoff dieser Klasse wird aber auch in besonderen Vorlesungen „über allgemeine Mathematik" in den Universitäten behandelt. Er entspricht im großen und ganzen dem, was bei uns an den technischen Hochschulen in der Mathematik vorgetragen wird.

Die französische Unterrichtsreform fand in den deutschen Gebieten ihren Widerhall. Die veränderte Auffassung des mathematischen Unterrichts zeigte sich deutlich in den auf der Naturforscherversammlung in Meran 1905 gefaßten Beschlüssen, die nicht mehr die Äußerung einer bestimmten Partei oder engeren Interessengruppe sind, sondern die ausgeglichenen Vorschläge aller beteiligten Kreise bedeuten. Dieser Gedanke einer gemeinsamen Arbeit der sämtlichen interessierten Fachkreise hat eine Fortführung gefunden in dem von den verschiedenen mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Gesellschaften Deutschlands 1908 eingesetzten Deutschen Ausschuß für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, dem der für die parallelen Aufgaben im technischen Lehrbetrieb 1909 gegründete Deutsche Ausschuß für technisches Schulwesen gegenübersteht. Für den mathematischen Unterricht insbesondere ist von der

Die Meraner Lehrpläne.

Unterrichtsausschüsse

größten Bedeutung die auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom 1908 ins Leben gerufene Internationale Mathematische Unterrichtskommission geworden, deren internationale Berichterstattung über den Betrieb und die Aufgaben des mathematischen Unterrichts in dem vollen Umfang seiner Ausdehnung das Material für eine zweckmäßige Organisation des ganzen mathematischen Unterrichtswesens schafft. Die Mathematik hat dadurch mehr als eingeholt, was in ihr hinsichtlich ihrer didaktischen Ausarbeitung versäumt worden war. Bei der geringen Fühlung, die in Deutschland vielfach zwischen der Verwaltung und den weiteren Fachkreisen besteht, sind wir leider auf die literarische Agitation angewiesen. Diese Agitation hat aber jetzt schon angefangen ihre Früchte zu tragen; die neuerschienenen Lehrpläne beginnen der zeitgemäßen Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts gebührend Rechnung zu tragen.

Der moderne Standpunkt.

Der Umschwung der Anschauungen, der so im mathematischen Unterricht gegen die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts herrschende Auffassung allmählich eingetreten ist, ist der denkbar größte. Damals galt es geradezu als verpönt, auf die Wirklichkeit anders Bezug zu nehmen, als um eine nützliche Denkübung daraus abzuleiten, jetzt sollen alle Probleme an der Wirklichkeit orientiert sein. Das Denken soll sich wohl entwickeln, aber es soll den Schüler nicht in leere Phantasiegebilde entführen, sondern ihn nur fester an die Erfassung der praktischen Aufgaben ketten. Wir sind allerdings noch weit davon entfernt, daß dieser ideale Zustand bereits allgemein zur Tatsache geworden wäre.

Der mathematische Unterricht an den preußischen Mädchenschulen.

Immerhin tragen die neuen Lehrpläne den modernen Bestrebungen bereits in anerkennenswerter Weise Rechnung. Als ein Beispiel hierfür können wir die neuen preußischen Bestimmungen für die höheren Mädchenschulen anführen. Die Maibestimmungen von 1894 hatten noch aus der höheren Mädchenschule die Mathematik ganz fortgelassen und den Rechenunterricht auf die elementarsten Aufgaben beschränkt. Maßgebend war hierbei der Gedanke, daß beim Knaben mehr der Verstand und Wirklichkeitssinn überwiege, beim Mädchen mehr das Gemüt und die Phantasie. Die Erziehung des Mädchens, die ja nicht als Vorbereitung für einen bestimmten Beruf, sondern für die Stellung der gebildeten Hausfrau berechnet war, solle die ihr eigentümlichen Eigenschaften pflegen, und dazu diene die literarisch-ästhetische Bildung besser als die Kenntnis mathematischer Lehrsätze und physikalischer Vorgänge. Dagegen wurde von seiten der Frauen sehr mit Recht geltend gemacht: Wenn die weibliche Natur wegen ihrer starken Anlage nach der Gefühlsseite hin dem folgerichtigen Denken mehr Hindernisse bietet als die männliche, sei dies um so mehr Grund, im Mädchenunterricht die Fächer zu betonen, die eine straffe Verstandesschulung hervorzubringen geeignet sind. Man könne überhaupt kein Urteil über die mangelnde Befähigung der Frau für die Mathematik abgeben, wenn man sie von aller Beschäftigung mit der mathematischen Wissenschaft methodisch fernhalte. Wo der Versuch gemacht worden, sei der Erfolg günstig genug gewesen (*Frauenbildung*, 3. Jahrg. 1904,

S. 49, Vortrag von Doblin in Danzig). Unter dem Ansturm der immer mächtiger anschwellenden Bewegung für die geistige Emanzipation der Frau trat zu Beginn unseres Jahrhunderts denn auch in der Auffassung der Behörden ein Umschwung ein, der seinen Ausdruck in den Augustbestimmungen von 1908 fand. Die Mathematik zog an den preußischen Mädchenschulen ein, ein Vorgang, der sich mit geringen Phasenverschiebungen in fast allen Kulturstaaten wiederholte. Diese Aufnahme der Mathematik in die Mädchenbildung entschied eigentlich die geistige Stellung der Frau, und es bestätigte sich so wieder, wie sehr doch die Mathematik im Mittelpunkt alles höheren Unterrichtswesens steht.

Die Bestimmungen von 1908 zeichneten sich aber auch vorteilhaft aus, trotz einiger Mängel in den Einzelheiten der Lehrpläne, durch die fortschrittliche Art, wie sie die Methodik des mathematischen Schulunterrichts auffaßten. Den formalen Ballast, das mechanische Lösen gekünstelter Gleichungen, das Vereinfachen besonders für diesen Zweck aufgebauter verwickelter Ausdrücke, das Einlernen geometrischer Definitionen usw. suchten sie über Bord zu werfen, dafür betonten sie die Anschaulichkeit und die feste Anknüpfung an die Wirklichkeit. Sie empfahlen die Benutzung graphischer Darstellungen zur Einführung in die arithmetischen Begriffe und Operationen, sie verlangten einen induktiven Beginn des geometrischen Unterrichtes, mit reichlicher Übung im Zeichnen: eine gute, saubere Ausführung der Zeichnungen sollte den ganzen Geometrieunterricht durchziehen. Die Sätze sollten auf induktivem Wege entwickelt werden. Auf allen Stufen sollte den Anwendungen unter möglichster Selbstbetätigung der Schülerinnen ein breiter Raum gewährt werden. Fortwährend sollte jede Gelegenheit benutzt werden, den Schülerinnen die Bedeutung des funktionalen Zusammenhanges klarzumachen. Die Gedanken der Reformbewegung sind so dem Wesen nach aufgenommen worden. Daß schließlich in der Praxis nicht alles so ausfiel, wie es in dem Entwurf des Lehrplans gedacht war, tut dessen Wert und Bedeutung keinen Abbruch.

Die neuen württembergischen Lehrpläne.

Auch die neuen Lehrpläne der süddeutschen Staaten für die höheren Knabenschulen haben sich im Mathematikunterricht dem neuen Geiste gut angepaßt. Besonders beachtenswert sind diese Reformen bei Württemberg, weil Württemberg vorher das Schulwesen, das ihm die Reformation gebracht hatte, mit großer Zähigkeit festhielt und nur ungern von der geheiligten Überlieferung abwich. Daher war der mathematische Unterricht, der in diese Anschauungsweise schlecht hineinpaßte, dem Umfange und der Beschaffenheit nach zurückgeblieben. Er spielte eine kümmerliche Rolle neben den sprachlich historischen Fächern, die dem redefreudigen, phantasiebegabten Schwaben an sich besser liegen. Auch jetzt ist die Hinneigung zur philosophischen Durcharbeitung ein charakteristischer Zug der aufgestellten Grundsätze für den mathematischen Unterricht. In den oberen Klassen sollen philosophische Rückblicke angestellt werden, welche womöglich im Anschluß an den Unterricht in der Philosophie zu geben sind und besonders die in der Mathematik üblichen Beweismethoden und Schlußverfahren zum Gegenstand haben. Kräftig wird ferner

betont die sprachliche Bedeutung der Mathematik, die Schüler an eine formal und sachlich richtige, kurze und bestimmte Ausdrucksweise und Darstellung zu gewöhnen. Ebenso soll auf die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Wissenschaft eingegangen werden. Aber auch Naturwissenschaften und Technik sollen Berücksichtigung finden, Rechnung und Zeichnung sollen gepflegt, das räumliche Anschauungsvermögen und die geometrische Vorstellungskraft ausgebildet werden. Dagegen ist ausdrücklich bemerkt, daß bei den Gleichungen mit mehreren Unbekannten nur solche Beispiele behandelt werden sollen, die sich ohne besondere Kniffe lösen lassen, vermieden sollen werden alle Konstruktions- und Berechnungsaufgaben, welche fernliegende Bestimmungsstücke enthalten, sowie solche, welche nur durch Kunstgriffe gelöst werden können, unnatürliche Textgleichungen usw. Sehr weit, weiter als es selbst den Führern der neuen Bewegung notwendig scheinen dürfte, ist auf den württembergischen Realanstalten die Infinitesimalrechnung und die darstellende Geometrie berücksichtigt. Die Realanstalten werden dadurch etwas zu Vorbereitungsschulen für die technischen Berufe, was sie eigentlich doch nicht sein sollen, sie sollen vielmehr eine allgemeine Bildung auf Grund der realen Fächer und der neuen Sprachen geben.

Gegensatz der alten und der neuen Auffassung.

Ein Lehrplan ist aber verhältnismäßig leicht zu schaffen. Viel schwieriger ist es, den Unterrichtsbetrieb umzugestalten. Ein guter Lehrer, dem die neuen Ideen vertraut geworden sind, wird auch im modernen Sinne unterrichten, aber die älteren Schulmänner, die noch tief in den alten Anschauungen stecken, und die vielen mittelmäßigen Pädagogen, die ihren Unterricht auf die bequemste Art, ohne allzuviel Bemühung um neue Wege und Ziele abzumachen suchen, sind viel schwerer zu beeinflussen. Die Lehrer und Lehrbücher haben die neuen Gedanken wohl aufgenommen, aber die alten darum nicht aufgegeben. So herrscht zurzeit ein krasser Gegensatz in dem Unterrichte selbst. Rein formale Übungen stehen zusammen mit Aufgaben des praktischen Lebens in so bunter Mischung, daß schwer zu erkennen ist, wo die einen anfangen und die anderen aufhören. Der Gegensatz läßt sich vielleicht am besten an einem Beispiel erläutern. Die linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten bilden einen Lieblingsgegenstand des formalen Mathematikunterrichtes und werden in unzähligen Aufgaben behandelt. Diese Aufgaben sind künstlich zurechtgemacht, meist so, daß sie eine einfache Lösung ergeben, wie etwa die Gleichungen $3x + 2y = 12$, $5x + 4y = 22$ die Lösung $x = 2$, $y = 3$. Die eigentlichen mathematischen Probleme, nämlich einerseits die wirkliche Ausrechnung von linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten auf die einfachste, sicherste und genaueste Art, und ebenso auf der anderen Seite die theoretische Diskussion der Fälle, wo die Lösung der Gleichungen unbestimmt ist oder die Gleichungen sich widersprechen, bleiben dabei unberücksichtigt. Der Schüler muß diese ihm vorgesetzten Gleichungen nur für eine pädagogische Erfindung halten, ihren rechten Sinn kann er auch aus den Phantasieaufgaben, auf die sie angewendet werden, nicht erkennen. Besser wird das schon, wenn die Gleichungen mit der analytischen Geometrie in Verbindung gebracht und im Falle

zweier Unbekannten durch gerade Linien, die der Schüler auf Millimeterpapier zeichnet, erläutert werden. So wird ihre Bedeutung anschaulicher und der Schüler kann die Lösung sofort aus dem Schnittpunkt der beiden gezeichneten Linien entnehmen. Die wirkliche Vollständigkeit und Eindringlichkeit wird aber erst erzielt, wenn man etwa den Schüler hinaus ins Feld führt und ihm die Aufgabe stellt, aus zwei Kirchtürmen, die er erblickt und die auf einer ihm vorliegenden Karte verzeichnet sind, den Ort zu bestimmen, an dem er steht. Durch eine einfache Vorrichtung kann er die Himmelsrichtung bestimmen, in der die Kirchtürme liegen, und danach direkt in der Karte oder auf Millimeterpapier durch die Punkte, an denen sich die Kirchtürme befinden, zwei gerade Linien ziehen, deren Schnittpunkt seinen Standort liefert. Begleitet er die Zeichnung dann noch durch eine Rechnung, so hat er so lebhaft und deutlich wie nur möglich erfahren, was zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten in Wirklichkeit bedeuten können.

Rechnung und Zeichnung.

Dieses Beispiel zeigt zugleich, wie Rechnung und Zeichnung das Rückgrat des ganzen mathematischen Unterrichtes bilden müssen. Das Verständnis einer analytischen Formel wird nur dann richtig erschlossen, wenn ihre praktische Verwendung an einem konkreten Beispiel gezeigt wird. Deshalb hat der größte aller Mathematiker, Gauß, auf das Zahlenrechnen einen sehr großen Wert gelegt und seine ungeheure Fertigkeit darin immer weiter ausgebildet. Aber gerade unter den heutigen Mathematikern ist vielfach die Auffassung vertreten, daß das Zahlenrechnen etwas Mechanisches und Unwürdiges sei. Daß es ein im strengen Sinne wissenschaftliches Rechnen gibt, wird dabei übersehen. Das einseitige logarithmische Rechnen, das wir auf den oberen Klassen unserer Schulen ausschließlich treiben, gibt einen falschen Begriff von dem Wesen des wissenschaftlichen Rechnens. Die numerische Auflösung linearer Gleichungen, die Interpolation und die Aufstellung empirischer Formeln oder die Bestimmung der Konstanten in theoretischen Formeln in Zusammenhang mit der Praxis des Beobachtens und Experimentierens bilden eine notwendige Ergänzung. Auch der Betrieb des Zeichnens auf unseren Schulen ist einer Verbesserung noch vielfach bedürftig. Daß von einem Zeichenlehrer geometrisches Zeichnen gegeben wird, nützt nichts, wenn der Schüler gleichzeitig im mathematischen Unterricht die Figuren zu seinen geometrischen Aufgaben nur mangelhaft ausführt und ihm nicht von Anfang an ein Begriff von der wirklichen Praxis des geometrischen Zeichnens im engen Zusammenhang mit der mathematischen Entwicklung gegeben wird. Die geometrischen Sätze bedeuten Tatsachen, die sich an der Erfahrung durch die Herstellung einer genauen Zeichnung ebenso wie die physikalischen Tatsachen durch Experiment und Beobachtung prüfen lassen. Wenn das aber im Unterricht nie hervortritt, vielmehr die gleich unvollkommenen Zeichnungen des Lehrers an der Wandtafel und des Schülers in seinem Heft nur als Erklärung für die gebrauchten Bezeichnungen dienen, so ist der Schüler trotz aller logischen Feinheit der Beweise nur zu geneigt, die ganzen Sätze für eine Erfindung der Pädagogen zu halten, ihr Wert und ihre wirkliche Be-

deutung dämmern ihm nicht auf. Wie rückständig hierin unser Schulunterricht ist, geht schon daraus hervor, daß die alten griechischen Konstruktionsmethoden vielfach noch unverändert beibehalten werden, trotzdem wir nicht wie die Griechen auf einer mit Sand bestreuten Fläche oder einer Wachstafel, sondern auf dem Papier mit Reißschiene und Dreiecken zeichnen. Kein vernünftiger Mensch zeichnet eine parallele Linie, indem er mit Hilfe des Zirkels ein Parallelogramm konstruiert, sondern einfach, indem er ein Zeichendreieck an dem anderen entlanggleiten läßt. Der Schulunterricht darf nicht der Praxis derart ins Gesicht schlagen.

Verbindung des formalen und realen Momentes.

Gewiß müssen wir uns vor seichter Nützlichkeitskrämerei hüten und dürfen nicht bei allem, was in der Schule getrieben wird, fragen, ob der Schüler später Gelegenheit haben wird, das Gelernte praktisch zu verwerten. Die Bedeutung des Mathematikunterrichtes als einer Schule des abstrakten Denkens soll nicht unterschätzt und beseitigt werden. Aber das abstrakte Denken braucht nicht an Aufgaben geübt zu werden, die jeder praktischen Verwendbarkeit, allem realen Sinn Hohn sprechen. Abstraktes Denken bedeutet nicht eine Abkehr von der Wirklichkeit, es bedeutet die Beherrschung der Wirklichkeit durch die Kraft des Geistes. Gewiß behält der alte Gedanke seine Bedeutung, daß, was auch der Schüler gelernt haben mag, wenn er seinen Geist dadurch gebildet hat, er einen Gewinn mit ins Leben hinaus nimmt. Aber gerade dadurch hat der Mathematikunterricht gefehlt, daß er sich so verhielt, als ob der Schüler für den Beruf des Mathematikers ausgebildet werden sollte. Die ganze Mathematik wurde einfach in zwei Teile geteilt, von denen der leichtere der Schule, der schwerere der Universität zugeschoben wurde. Die Scheidung wurde so methodisch wie möglich begründet, aber man vergaß dabei, daß die Schulbildung in sich einen Abschluß bedeuten muß, weil ja die Schüler nur in seltenen Fällen gerade die Mathematik als Lebensberuf ergreifen werden. Die Frage durfte nicht so gestellt werden: was kann von der mathematischen Fachausbildung der Schule zuerteilt werden? sondern: was kann von der Mathematik innerhalb der für die Schule gesteckten Grenzen der allgemeinen Bildung dienen? Zur allgemeinen Bildung gehört nun sicher nicht eine so ausgebildete Fertigkeit in der Ausführung algebraischer Operationen und geometrischer Konstruktionen, wie man sie im Schulunterricht zu erreichen suchte. Welchen inneren oder äußeren Gewinn hat der Schüler davon, wenn er einen komplizierten Wurzelausdruck reduzieren oder ein Dreieck kunstfertig aus den Höhen oder den Mittellinien konstruieren kann? Es läßt sich darauf nicht entgegnen, daß diese Fertigkeiten selbst gar nicht ausgebildet werden sollen, sondern daß sie nur zur Einprägung allgemeiner mathematischer Wahrheiten dienen. Es wird in der Tat gar keine Gewähr dafür geboten, daß der Schüler die Mathematik innerlich durchdrungen hat, wenn ihm die Lösung bestimmter Aufgaben mechanisch eingedrillt ist. Gewiß ist eine bestimmte Übung im Gebrauche der Formeln und Sätze bei der Mathematik unerläßlich, aber diese Übung braucht nicht in das Einüben von unzähligen Aufgaben und Beispielen für die gelernten

Sätze auszuarten, viel wichtiger ist, ihre wirklich praktische Verwendung zu geben; denn erst durch die Übertragung in die Wirklichkeit lernt der Schüler begreifen, um was es sich handelt. Weniger, aber gut durchgeführte und wirklich praktische Beispiele, das wäre die Forderung, die für eine gedeihliche Ausgestaltung des mathematischen Unterrichts zu erheben ist.

Bedeutung der Mathematik für die allgemeinen Schulen.

Wir müssen eben bedenken, daß nicht die Erlangung bestimmter Fertigkeiten, sondern außer der Klärung des Denkens das Verständnis für bestimmte Erscheinungen der Natur und bestimmte Erzeugnisse der menschlichen Kultur das Ziel des mathematischen Unterrichtes ist. Wenn es im allgemeinen für die höheren Schulen eine Herabsetzung bedeutet, sie auf praktische Zwecke zuschneiden zu wollen, so ist doch bei der Mathematik die Hervorhebung des realen Moments wirklich berechtigt, denn gerade an den praktischen Problemen zeigt die Mathematik ihre formalen Vorzüge am unwiderleglichsten. Es ist nicht richtig, daß sich durch die Mathematik mehr wie durch jede andere Wissenschaft das logische Denken erziehen läßt, denn die Mathematik gründet sich wie alle Wissenschaften auf der Bildung bestimmter Ideenverbindungen und nicht einfach auf der logischen Zergliederung eines gegebenen Tatbestandes. Kein mathematischer Beweis läßt sich selbst rein logisch deduzieren, er beruht immer auf einem glücklichen Einfall, durch den der Entdecker des Beweises darauf kommt, welche Sätze und Schlüsse in dem besonderen Falle den gesuchten logischen Zusammenhang liefern. Die formalen Vorzüge, welche die Mathematik besitzt und die sie für die Verwendung im Unterricht besonders geeignet machen, bestehen in der Gewöhnung an eine bestimmte Art der Abstraktion, die Auffassung von Maß und Form in den Gegenständen der wirklichen Welt und damit ihre exakte, wenn auch nüchterne Bestimmung, in der Erziehung zu einer ruhigen Sachlichkeit, die von allem persönlichen Empfinden unabhängig ist, der Erweckung des logischen Gewissens, das Bewiesenes von Unbewiesenem gehörig trennt. Dazu kommt noch ein Vorzug, der gewöhnlich unterschätzt wird: in der Mathematik ist es eine wesentliche Aufgabe, die Gesamtheit der möglichen Fälle vollständig zu überblicken und nicht einen entlegenen, unbequemen Sonderfall zu vernachlässigen, und dieses Überschauen der Gesamtheit aller Möglichkeiten ist auch für die Analyse jedes vorliegenden Tatbestandes, wo immer er sich darbietet, unerläßlich. Mit der formalen Bedeutung der Mathematik steht in engem Zusammenhange ihr Wert für die Ausbildung des sprachlichen Ausdrucks. Die Darstellung mathematischer Dinge läßt keinen rhetorischen Prunk zu, der Wortschatz, der gebraucht wird, ist ein sehr beschränkter, aber was verlangt wird, ist vollkommene Klarheit in den Aussagen und deutliche Hervorhebung der logischen Gedankenverbindung. So wird der mathematische Stil wohl einfach und nüchtern, aber klar und durchsichtig sein, und das sind in unserer der Phrase abholden Zeit große Vorzüge. Leider wird die sprachliche Durcharbeitung des mathematischen Lehrstoffes auf der Schule häufig wenig gepflegt, und dann wirkt der mathematische Unterricht nur ungünstig auf den Stil des Schülers ein, er gewöhnt ihn an eine unschöne, nachlässige Ausdrucksweise.

Anwendungsgebiete der Mathematik.

Neben diese formale Bedeutung, die früher als der Hauptvorzug des mathematischen Unterrichtes galt, tritt für uns aber auch ihre Bedeutung für bestimmte Anwendungsgebiete. Durch die Rücksichtnahme auf diese wird allerdings die Notwendigkeit geschaffen, die mathematische Belehrung mit verwandten Fächern zu verquicken. Unter diesen Fächern ist zunächst die Physik anzuführen, die ja auch einen Lehrgegenstand der Schule bildet und mit der der mathematische Unterricht sich in enger Fühlung halten muß, teils indem er für den mathematischen Ausdruck der physikalischen Abhängigkeiten dem Schüler das Verständnis eröffnet, teils auch, indem er umgekehrt das in der Physik Gelernte zur Begründung der mathematischen Vorstellungen verwertet. So spielt z. B. bei der Einführung des Differentialquotienten dessen physikalische Verwendung, insbesondere sein Auftreten als Geschwindigkeit und Beschleunigung, eine große Rolle, und der Ausdruck für die mechanische und thermische Arbeit, wie er an der Wärmekraftmaschine wirkungsvoll erläutert werden kann, bildet ein wichtiges Beispiel für das Integral; er tritt in dem von der Kraftmaschine selbsttätig aufgezeichneten Indikatordiagramm unmittelbar als Fläche in die Erscheinung. Neben der Physik sind Geodäsie und Astronomie zu nennen, die in unseren heutigen Lehrplänen nicht mehr als besonderes Lehrfach auftreten, sondern nur als „mathematische Geographie" einen Teil des mathematischen Unterrichtes bilden. Eine gewisse Belehrung über astronomische Dinge ist ein unbedingtes Erfordernis der allgemeinen Bildung. Über den jährlichen Lauf der Sonne am Himmel sollte ein jeder Bescheid wissen. Aber gerade hierin herrscht oft die krasseste Unwissenheit. Dies liegt weniger daran, daß es in der Schule nicht gelehrt worden ist, als daran, daß der Schulunterricht die rechte Verbindung mit der wirklichen Beobachtung nicht zu finden gewußt hat. Astronomie läßt sich nicht allein im Schulzimmer treiben. Die Praxis des Beobachtens, wenn auch in der einfachsten Form, ohne besondere Instrumente, gehört unbedingt dazu. Ebenso ist es auch mit der Trigonometrie als der Grundlage der Feld- und Erdmessung. Auch die feinst ausgetiftelten Aufgaben können nicht das ersetzen, was die einfachste praktische Messung leistet. Lasse man einmal den Schüler eine Landkarte oder einen Lageplan auf Grund eigener Messungen herstellen, er wird mehr Gewinn davon haben als von der geschicktesten Belehrung im Klassenzimmer. Hierbei spricht neben dem allgemeinen Interesse noch ein besonderes, sozusagen nationales Moment mit. Die Schüler unserer höheren Lehranstalten sollen einmal in der Armee dienen und dabei ist für sie die Fähigkeit des Orientierens im Felde von großer Bedeutung.

Physik. — Geodäsie und Astronomie.

Beziehung zum bürgerlichen Leben.

Eine ganz andere Art mathematischer Anwendung wird durch das bürgerliche Leben und die kaufmännische Praxis gegeben. Solange man nicht Wirtschaftskunde als besonderes Fach in unseren höheren Schulen einführt, wird dem mathematischen Unterricht die Aufgabe zufallen, den Schüler über diese Dinge zu belehren. Dadurch wird dieser Unterricht allerdings mit vielem sachlichen Material belastet, aber es wird auch die Möglichkeit gegeben, einige der wichtigsten und nutzbringendsten Anwendungen der Mathematik zu be-

rücksichtigen. Allerdings wird hierbei von dem Lehrer viel Takt und Feingefühl gefordert, denn einerseits gilt es, die nur dem Namen nach praktischen, in Wirklichkeit rein formalen Rechnungen zu vermeiden, die sich als Terminrechnung, Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung usw. noch von Lionardo Pisano her in unseren Aufgabensammlungen erhalten haben, anderseits darf aber auch der Unterricht nicht in einen kaufmännischen Fachunterricht ausarten, denn abgesehen von allem anderen fehlen dem Schüler, der außerhalb des praktischen Lebens steht, die realen Grundlagen für das rechte Verständnis einer solchen Unterweisung.

Fühlung mit der Technik.

Endlich muß der mathematische Unterricht der höheren allgemeinen Schulen auch in einer bestimmten Beziehung zu den Aufgaben der Technik stehen. Unsere heutige Kultur läßt es geboten erscheinen, daß jeder Gebildete für die Erscheinungen auf technischem Gebiet ein gewisses Verständnis zeigt. Besonders ist dies für Kaufleute und Verwaltungsbeamte direkt ein Erfordernis ihres Berufes. Die hierzu nötigen Kenntnisse oder wenigstens die Grundlagen dafür müssen sie sich aber auf der Schule erwerben. Es kann der Schulunterricht gewiß nicht im einzelnen auf technische Probleme eingehen, er kann nur die allgemeinen Gesichtspunkte hervorheben. Ein Teil dieser Aufgabe muß zweifellos dem physikalischen Unterricht zufallen, es wird ja auch z. B. die Dampfmaschine, der Elektromotor usw. im physikalischen Unterricht besprochen, wenn da auch manches noch der Verbesserung fähig wäre. Dem mathematischen Unterricht fällt zunächst die Erweckung des Verständnisses für die technische Zeichnung zu. Die Form einer Maschine oder eines Gebäudes aus den technischen Zeichnungen zu erkennen, ist etwas, was erst gelernt werden muß. Den Grundriß seiner eigenen Wohnung richtig zu verstehen sollte aber schließlich jeder gebildete Mensch imstande sein. Ebenso sollte er auch das Verständnis für die Maßskizze eines Handwerkers besitzen und nötigenfalls selbst, wenn er ein neues Gerät für seine Wohnung braucht, seinem Tischler eine solche Skizze in die Hand geben können. Abgesehen von dem persönlichen Vorteil wird so die Fühlung mit der gewerblichen Tätigkeit und dadurch mit dem kulturellen Leben eine viel engere und innigere. So sollte im Geometrieunterricht nicht bloß ein Erläutern der technischen Zeichnungen, sondern auch ein Herausheben geeigneter Aufgaben geometrischen Charakters aus der Technik, deren es genug gibt, Platz greifen. Es kann sich allerdings nur um gelegentliche Beispiele, nicht aber um ein Eingehen auf größere technische Probleme handeln.

Historische Gesichtspunkte.

Von großem Wert erscheint auch das historische Moment im mathematischen Unterricht. Wenn dem Schüler nicht bloß die mathematischen Tatsachen vorgelegt werden, sondern ihm auch erzählt wird, wie sie sich in der geschichtlichen Entwicklung ergeben haben, welch große persönliche Leistung in ihnen steckt, wie sie in Zusammenhang stehen mit der ganzen menschlichen Kulturentwicklung, so wird dem Schüler am ehesten das Verständnis für den lebendigen Geist aufgehen, der in den mathematischen Formeln und Figuren atmet.

Volks- und Bürgerschulen.

Die gleiche Aufgabe, wie sie der mathematische Unterricht an den höheren Schulen zu erfüllen hat, wiederholt sich in einer anderen Form wieder bei den Volks- und Bürgerschulen. Nur tritt hier die theoretische Seite des Unterrichts noch mehr zurück. Die logische Entwicklung muß noch weiter beschränkt, die Resultate müssen viel mehr empirisch anschaulich entwickelt werden. Die Fühlung mit der Wirklichkeit tritt derart noch unmittelbarer und kräftiger hervor, um so mehr, als der Zögling der Volksschule ja später nicht durch geistige Tätigkeit, sondern durch die Arbeit seiner Hände sein Brot verdienen muß. Das ist aber lange, so entschieden es schon Pestalozzi betont hat, außer acht gelassen worden. Erst heute beginnt der alte formale Betrieb des Rechnens durch die Berücksichtigung des praktischen Lebens gebessert zu werden, der durch die Pestalozzische Richtung an die Volksschule gekommene Raumlehreunterricht, d. h. elementare Geometrieunterricht, in eine Erziehung der Anschauung für die regelmäßig gestalteten Raumformen im Kinde mit Rücksicht auf seinen späteren praktischen Beruf auszumünden. Dieser Unterricht bildet, richtig geleitet, eine zweckmäßige, ja notwendige Vorbereitung auf das Fachzeichnen der gewerblichen Fortbildungsschule, wie überhaupt eine engere Fühlungnahme der Volksschulen mit den niederen Fachschulen der großen Aufgabe der Volkserziehung nur zum Segen gereichen kann. Die Voraussetzung hierfür ist allerdings auch eine zeitgemäße Ausgestaltung der Lehrerbildungsanstalten, die jetzt wohl im Werden ist, aber fast ebenso stark wie die höheren Schulen gegen überkommene Vorurteile anzukämpfen hat. Der mathematische Unterricht ist an den Lehrerseminaren insofern etwas anders gestellt wie an den allgemeinen höheren Schulen, als die spätere Verwertung des Gelernten von vornherein feststeht. Es ist sozusagen ein Seitenstück zu der Ausbildung der höheren Lehrer auf den Universitäten, auch hier soll ja das Gelernte über das später im eigenen Unterricht Gelehrte weit hinausgehen, trotzdem soll der Zweck, für den es erworben wird, nicht aus dem Auge verloren werden.

Die Lehrerseminare.

Die Fachschulen.

Viel sicherer, als es an den durch allgemeine Ziele bestimmten allgemeinen Schulen möglich, ist an den Fachschulen Umfang und Methode des mathematischen Unterrichts umgrenzt. Auf seine Eigenart einzugehen ist aber nur möglich, wenn die Einzelheiten des mathematischen Lehrstoffes als bekannt vorausgesetzt werden können, und würde selbst dann viel zu viel Raum beanspruchen, als daß es sich an dieser Stelle durchführen ließe. Wir müssen uns deshalb auf einige allgemeine Bemerkungen beschränken. Wir können in der Art, wie die Mathematik zur Verwendung gelangt, drei Stufen unterscheiden: eine niedere, mittlere und höhere. Die niedere Stufe ist die der Lehrlingsschulen. Sie läßt sich im allgemeinen kurz dadurch kennzeichnen, daß die mathematische Belehrung vom Fachunterricht überhaupt nicht getrennt erscheint. Unmittelbare Anwendbarkeit des Gelernten muß hier die Richtschnur bilden. Dadurch ergibt sich eine Eigenart des Unterrichts an diesen Anstalten, die sich allerdings erst allmählich auszubilden beginnt, die aber dieser für unsere sozialen und wirtschaftlichen Verhältnisse außerordentlich wichtigen Schulgat-

tung auch ein besonderes methodisches Interesse verleiht. Nirgends ist das Band zwischen Wissen und Schaffen ein so enges wie hier, nirgends aber zeigt sich gleichzeitig so deutlich und klar die Bedeutung der theoretischen Einsicht auch für die einfachste Berufsarbeit. Die mittlere Stufe der Fachschulen ist die, wo wohl ein gesonderter mathematischer Unterricht erteilt wird, aber in vorsichtig beschränkter Form. Im einzelnen lassen sich hier noch sehr viel Grade unterscheiden; z. B. sind die niederen von den mittleren technischen Fachschulen zu trennen. An den niederen Fachschulen, den Gesellenschulen, wird gewöhnlich nur ein Unterricht in den Elementen der Algebra und der Geometrie erteilt, an den mittleren technischen Fachschulen geht der mathematische Unterricht bis zur analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung hinauf. Die immer noch sehr beliebte Sonderung der Mathematik in einzelne Fächer hat für diese Schulgattungen übrigens nur einen sehr problematischen Wert, viel richtiger wäre es, wie es bei den technischen Hochschulen, allerdings unter Absonderung der sogenannten darstellenden Geometrie, jetzt meistens geschieht, die gesamte sich als zweckmäßig erweisende mathematische Belehrung als ein Unterrichtsgebiet zu behandeln. Die mathematische Darstellung wird an technischen Fachschulen weniger nach wissenschaftlicher Feinheit als nach praktischer Brauchbarkeit zu streben haben, ohne daß sie darum weniger anmutig zu werden und in eine Ansammlung zusammenhangloser Einzelheiten auszuarten braucht. Wenn man auch unnötiges Theoretisieren vermeiden soll, so braucht doch die Belehrung nicht verstümmelt zu werden aus Angst davor, an einer Stelle mehr zu bringen als unbedingt erforderlich ist. Merkwürdigerweise beobachtet man gerade bei Lehrern, die aus einer praktischen Schule stammen, den Hang zum Formalismus; sie glauben ihn anscheinend dem Gegenstande schuldig zu sein, während doch nur die zu lösende praktische Aufgabe die mathematische Behandlung bestimmt.

Antimathematische Strömung in Deutschland.

Bei den höheren Fachschulen und auch bei den technischen Hochschulen hat sich, was den mathematischen Unterricht betrifft, in Deutschland eine eigentümliche Erscheinung gezeigt. Die Furcht vor langatmigen mathematischen Entwicklungen, welche die Ausbildung des Zöglings für seinen Beruf hintanhalten, hat vielfach dazu getrieben, die mathematische Unterweisung zurückzudrängen oder überhaupt zu beseitigen, sie hat eine entschiedene antimathematische Strömung gezeitigt. Um diese Strömung zu verstehen, muß man sich die eigentümliche Stellung der Mathematik inmitten der verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen vergegenwärtigen. Im Wesen handelt es sich um den Gegensatz der deduktiven und induktiven Methode und ein Vordrängen der Induktion als der Wirklichkeit unmittelbarer und unbefangener angepaßt. Daß sich der Gegensatz der Methoden zu einer Art Rangstreitigkeit steigert, ist vielleicht nur in unserer deutschen Eigenart begründet. Wir können uns die Sachlage so klarmachen: Die Anwendungen der Mathematik erstrecken sich auf der einen Seite in das Gebiet des menschlichen Lebens hinein, dahin gehören die kaufmännische Arithmetik, die Versicherungsrechnung, die mathematische Statistik und die Versuche, die Mathematik auf

die wirtschaftlichen Erscheinungen anzuwenden. Auf dieser Seite tritt der Mathematik die historische Forschung entgegen. Man macht geltend, daß die Vorgänge im wirtschaftlichen Leben zu mannigfaltig und verwickelt sind, um sie ebenso wie die physikalischen Vorgänge einer quantitativen Analyse durch die mathematische Behandlung unterwerfen zu können. Dagegen erschließe die Betrachtung der geschichtlichen Entwicklung wirklich die qualitative Eigenart unserer gesellschaftlichen Zustände. Die andere Seite der mathematischen Anwendungen liegt auf dem Gebiete der Naturwissenschaft, in die sie durch die Mechanik und die theoretische Physik so ungezwungen hinübergleitet, daß sich die Grenzen fast völlig verwischen. Hier erwächst ihr aber eine Feindschaft in der experimentellen Untersuchung. Eine solche Feindschaft besteht nicht von Haus aus. Im Gegenteil greifen mathematische und experimentelle Forschung beständig ineinander über. Die experimentellen Untersuchungen Faradays mußten erst von Maxwell mathematisch durcharbeitet werden, ehe auf den Folgerungen dieser Theorie Hertz seine grundlegenden Versuche aufbaute, und wiederum mußte erst Lorentz vom theoretischen Standpunkte aus die Elektronentheorie entwickeln, ehe man die elektrisch geladenen Teilchen in einzelnen experimentell gefundenen Strahlungsarten wirklich erkannte. Aber in der Erziehung erhebt sich das Verlangen nach einer überwiegend experimentellen Ausbildung schon in der Physik und in noch viel stärkerem Maße in der Chemie und der auf den Resultaten der Naturforschung aufbauenden Technik. Am stärksten ist die Zurückdrängung in der Architektur, wo überhaupt das Technische gegen das Künstlerische zurücktritt. So muß z. B. bei der Ausbildung der Architekten an den norddeutschen technischen Hochschulen der die Festigkeitslehre vortragende Dozent die erforderlichen mathematischen Kenntnisse in seinen Vortrag hineinverweben, weil der mathematische Lehrgang, der für die Zwecke der Architekten eingerichtet ist, von diesen selten besucht wird. Dieselbe Tendenz herrscht auch an den Forstakademien vor, an denen man ebenfalls die mathematischen Hilfskenntnisse mit der fachlichen Unterweisung zu verschmelzen sucht. Ebenso wollen auch die Handelshochschulen bei uns in Deutschland von einem besonderen mathematischen Unterricht absehen, während in anderen Ländern die Mathematik an diesen Anstalten schon ihres formalen Bildungswertes wegen eine gründliche Berücksichtigung findet. Dabei wird von den deutschen Handelshochschulen übersehen, daß die für die kaufmännischen Aufgaben, die Versicherungsrechnung, die Statistik usw. erforderliche Mathematik einen ganz bestimmten realen Charakter hat, der durch die von ihr behandelten Probleme mit Notwendigkeit bestimmt und in seiner Eigenart auch durch einen zusammenhängenden Unterricht zur Geltung kommen muß. Es ist schwer abzusehen, wie die Handelslehrer, die an den Handelshochschulen ausgebildet werden und später zum großen Teil die kaufmännische Mathematik unterrichten sollen, eine solche mathematische Ausbildung völlig entbehren können. Auch an unseren Militärakademien herrscht zurzeit in schroffem Gegensatz zu den Wünschen eines Scharnhorst im allgemeinen dieselbe Tendenz, die Mathematik nach Mög-

Verhalten der verschiedenen Fachschulen.

lichkeit zurückzuschieben oder wenigstens sie dem Berufsmathematiker zu entziehen. An den Bergakademien ist Mathematik und Mechanik verschmolzen worden, angeblich um die Anschaulichkeit des Unterrichts zu gewährleisten, indem die Maschinen, die der Bergwerksbetrieb benutzt, die Demonstrationsobjekte bilden, so daß die schließliche Anwendung des vorgetragenen mathematischen Lehrstoffes diesen von Anfang an bestimmt. Die so fast überall erstrebte Verschmelzung der Mathematik mit dem Fachunterricht ist jedoch in Wirklichkeit nur da möglich, wo der Lernende die erforderlichen methodischen Hilfskenntnisse bereits besitzt. Diese Kenntnisse lassen sich ja nicht nebenbei in einem Unterricht erwerben, der dieser Seite nur einen geringen Teil der Zeit und Aufmerksamkeit zuwenden kann.

Widerstände gegen die Mathematik an den allgemeinen Schulen.

Selbst an den allgemeinen höheren Schulen hat sich eine antimathematische Strömung gezeigt, in der sich die Vertreter der literarischen und der rein naturwissenschaftlichen Fächer zusammenfinden. Auch die aufgekommene realistische Tendenz, welche die Sprachen als Verkehrsmittel pflegt und die Naturwissenschaften auf die unmittelbare Beobachtung gründet, ist der Mathematik wenig günstig, während die Altphilologen, welche die Wohltat einer straffen grammatikalischen Schule betonen, zum Teil die geistesbildende Kraft der Mathematik unumwunden anerkennen. So hat sich der beim ersten Anblick befremdliche Zustand ergeben, daß gerade an den Oberrealschulen, die ursprünglich wesentlich als mathematisch-naturwissenschaftliche Lehranstalten gedacht waren, der Mathematik ein starker Widerstand erwächst. Diese Schulen erblicken zum Teil ihre Stärke und ihre Zukunft durchaus in den sprachlichen Fächern, sie suchen sich zu einem neusprachlichen Gymnasium zu entwickeln und statt in dem Anschluß an die moderne Kultur, an die Naturerkenntnis und Naturbeherrschung, suchen sie die geistige Schulung, die in den alten Sprachen liegt, wiederzugewinnen in einer didaktischen Durchbildung der modernen Sprachen.

Die so in Deutschland augenblicklich vielfach herrschende Tendenz, den mathematischen Unterricht nach Möglichkeit und sogar über Möglichkeit zurückzudrängen, ist vielleicht zum großen Teil durch den früheren formalen Lehrbetrieb unserer Schulen und die Geringschätzung vieler Fachmathematiker für alle praktischen Probleme großgezogen worden. Wo der Mathematik bestimmte Aufgaben gestellt sind, wie bei der Ausbildung der Feldmesser und Markscheider, sowie an den Schulen der Kriegs- und Handelsmarine, nimmt sie eine bestimmte, nicht zu beschränkende Stellung ein. Die Navigation beruht im wesentlichen auf einer mathematischen Ausbildung, welche die Grundlage für die terrestrische und astronomische Ortsbestimmung liefert. Die Navigationsschulen sind daher von allen Fachschulen die, für die die Mathematik die relativ größte Bedeutung hat; das Aufsteigen vom gemeinen Matrosen zum Schiffsoffizier und damit in eine höhere Gesellschaftsklasse geschieht allein auf Grund bestimmter mathematischer Kenntnisse. Der Gegensatz von Theoretikern und Praktikern, der sich leider bei jeder fachlichen Ausbildung auftut, hat sich aber auch an den Navigationsschulen bemerkbar gemacht, und die Forderung der Ausbildung des Schiffsoffiziers durch

Die Navigationsschulen.

praktische Seeleute selbst in den theoretischen Fächern ist oft mit großer Leidenschaftlichkeit erhoben worden, trotzdem sie schon wegen der steigenden Bedeutung der physikalischen Gebiete für die heutige Seefahrt mittlerweile geradezu zur Unmöglichkeit geworden ist. Es wird hierbei immer außer acht gelassen, daß der Lehrer keineswegs alles das wissen muß, was der Schüler lernt, daß er vielmehr das Fach, das er unterrichtet, autoritativ beherrschen und dabei nur das richtige Verständnis dafür mitbringen muß, in welcher Weise der Schüler gerade dieses Fach braucht. Alle wirklichen großen Fortschritte in einer fachlichen Ausbildung sind dadurch gemacht worden, daß man möglichst tüchtige Vertreter der einzelnen Wissenschaften zu finden gesucht hat, die sich dann zu gemeinsamer Arbeit zusammentaten.

Die Mathematik in der Ingenieurausbildung.

Trotzdem haben sich, auch was die höchste fachliche Ausbildung, die der technischen Hochschulen, betrifft, in neuerer Zeit Stimmen laut gemacht, welche die Ausbildung nach Möglichkeit ausschließlich Vertretern des Faches, dem der Studierende selbst angehört, anvertraut wissen wollen. Die von Berufsmathematikern geleitete mathematische Ausbildung ist statt als eine Vorbedingung des technischen Schaffens vielfach als ein Hemmnis der technischen Anschauung empfunden worden. Es ist eine allgemeine Tatsache, daß auf einem Gebiete der Anwendung die Mathematik um so weniger als solche empfunden wird, je enger sie mit dem Gegenstande verschmolzen ist; aber zur Bildung des höheren Technikers gehört, daß er die Hilfswissenschaften der Technik frei beherrscht und nicht bloß so weit, wie sie bereits für bestimmte technische Probleme zurechtgemacht worden sind. Erst in der letzten Zeit sind die Streitrufe gegen die Mathematik einer gemäßigteren Auffassung gewichen. Die Erfahrung, daß der Studierende beim Eintritt in die technischen Fächer aus dem theoretischen Unterricht doch nicht die Kenntnisse mitbringt, die er braucht und die man verlangen sollte, ist jedenfalls, so richtig sie ist, nicht in der Nutzlosigkeit der theoretischen Unterweisung, sondern in einer Eigenart der menschlichen Natur begründet. Das Wissen einer Sache und ihre richtige Verwendung sind zwei verschiedene Dinge. Der Lernende macht sich in seinem Geiste sozusagen verschiedene Schubfächer, in denen er die einzelnen Disziplinen unterbringt. Diese Schubfächer hält er sauber getrennt; was in dem einen liegt, wird er nie in ein anderes bringen; daß alle die Einzelbelehrungen Teile eines großen Ganzen sind, entgeht ihm, er erkennt es erst, wenn er das Gelernte in einer längeren praktischen Erfahrung verwertet hat. Dazu kommt, daß bei der akademischen Freiheit, die sehr im Gegensatz zu Frankreich an unseren technischen Hochschulen herrscht, der Studierende nicht gezwungen werden kann, die Vorlesungen und Übungen regelmäßig zu besuchen, und gerade die ersten Semester, in denen die mathematische Ausbildung liegt, sind aus bekannten Gründen in dieser Hinsicht die gefährlichsten. Und doch erfordert gerade die Ausbildung des Ingenieurs eine unablässige fleißige Arbeit und die Nachlässigkeit, mit welcher der höhere Techniker bisweilen sein Studium betreibt, gibt dem in eiserner Zucht herangebildeten mittleren Techniker ihm gegenüber einen Vorteil, der sich durch alle akademische

Würde nicht wettmachen läßt. Über alledem sollte aber nicht vergessen werden, wie gerade die mathematische Schulung dem Ingenieur nicht bloß die für sein Fach nötigen Hilfskenntnisse mitteilt, wie sie ihn auch reif macht zur Auffassung der sich ihm darbietenden Aufgaben. Ähnliche Verhältnisse wie bei den Ingenieuren zeigen sich auch bei den Physikern. Die mathematischen Vorlesungen stehen dem physikalischen Lehrbetrieb meist fern. Was der Physiker an Mathematik braucht, lernt er zum großen Teil in den physikalischen Vorlesungen selbst, und es stört den Studierenden in den seltensten Fällen, daß die prinzipielle Auffassung z. B. der Infinitesimalbegriffe in seinen physikalischen Vorlesungen eine ganz andere ist, wie er es in den mathematischen Vorlesungen hört. Die Klage über die unpraktische Mathematik ist nicht bloß von Ingenieuren, sondern auch von Physikern erhoben worden. Gewiß gibt es Zweige der Mathematik, die zu den Anwendungen außer allen Beziehungen stehen, man denke z. B. an die Zahlentheorie, die uns nur die Wunder der Zahlenwelt, aber keine Gegenstände der Sinnenwelt erschließen soll. Daß aber die Mathematik an sich unfähig wäre, sich den Anwendungen anzupassen, ist ein offenbarer Irrtum. Im Gegenteil hat die ganze historische Entwicklung gezeigt, daß in ihr die mächtigste Triebfeder zur Entwicklung der Naturforschung steckt. Ihre Bedeutung für die Erfassung der Wirklichkeit rechtfertigt die Forderung, ihr gerade auch im Fachunterricht die gebührende Stellung einzuräumen.

Physiker.

Zweckbestimmung des mathematischen Unterrichts.

Die Aufgabe der Mathematik an den fachlichen und an den allgemeinen Schulen ist eine völlig verschiedene. Überträgt man den Gedanken der durch die Mathematik erreichten formalen Geistesbildung von den allgemeinen Schulen ohne weiteres auf die Fachschulen, statt den realen Zweck des Unterrichts in den Vordergrund zu stellen, so löst man einen heftigen Widerstand aus, denn immerhin hält eine solche Bildung die fachliche Erziehung auf und entfremdet den Schüler seinen eigentlichen Aufgaben. Daher muß im mathematischen Unterricht der fachlichen und der allgemeinen Schule eine völlig verschiedene Unterrichtsweise herrschen, und auch die Lehrkräfte müssen dem besonderen Zwecke gemäß ausgewählt sein. Auf eine geeignete, zielbewußte Ausbildung der Lehrer für die verschiedenen Lehranstalten kommt schließlich alles an, und je mehr Aufmerksamkeit die Regierungen der Organisation dieser Ausbildung und die Schulleiter der Auswahl ihrer Lehrkräfte angedeihen lassen, um so segensreicher wird sich der mathematische Unterricht entfalten und um so weniger wird er Anlaß zur Befehdung bieten. Möge man sich bewußt bleiben, daß in der Mathematik die Quelle der exakten Wissenschaft überhaupt liegt, daß sie uns dazu geführt hat, die Gesetze des menschlichen Denkens bloßzulegen und daß sie der lebendigste Beweis für die schöpferische Kraft des menschlichen Geistes ist, möge man auch bedenken, daß aus ihr die ganze wissenschaftliche Technik hervorgewachsen ist, daß sie das mächtigste Werkzeug zur Erforschung der Naturgesetze bildet, dann wird man auch klar erkennen, wieviel Gutes ein zweckmäßig geleiteter mathematischer Unterricht stiften kann!

Literatur.

Eine Rechenschaft über die für die vorstehende Darstellung benutzte Literatur läßt sich nicht geben, weil diese allzuweit verstreut ist. Es läßt sich nur ungefähr der Weg bezeichnen, auf dem der Leser diese Literatur finden kann. Die Mathematik ist bei der allgemeinen Darstellung der pädagogischen Entwicklung im allgemeinen schmählich vernachlässigt worden. Das große dreibändige Werk von L. GRASBERGER, Erziehung und Unterricht im klassischen Altertum (Würzburg 1864—1881) z. B. geht auf die mathematische Bildung so gut wie gar nicht ein, trotzdem wir ihr doch in der geistigen Entwicklung der Griechen die größte Bedeutung zuschreiben müssen. Ebenso kann das Werk von F. A. SPECHT, Geschichte des Unterrichtswesens in Deutschland bis zur Mitte des XIII. Jahrhunderts (Stuttgart 1885) nur über die allgemeinen Unterrichtsverhältnisse, nicht aber über die Stellung der Mathematik orientieren. Das gleiche gilt leider auch von K. A. SCHMIDS umfangreicher Geschichte der Erziehung (Stuttgart 1884—1902) und FR. PAULSENS zweibändiger Geschichte des gelehrten Unterrichts (2. Aufl., Leipzig 1896/97), in der die Mathematik nur sehr vereinzelt Erwähnung findet. Von vornherein nur mit der Organisation befassen sich die Werke von L. WIESE, Das höhere Schulwesen in Preußen, historisch-statistische Darstellung (4 Bde., Berlin 1864—1902), das von W. LEXIS herausgegebene Werk, Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen (Halle 1902) und das im großen Stil angelegte, für die Weltausstellung in St. Louis abgefaßte Sammelwerk von W. LEXIS, Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich (Berlin 1904). In Beziehung auf die Mathematik werden diese Werke ergänzt durch eine Reihe von Spezialuntersuchungen, von denen ich die folgenden nennen möchte: S. GÜNTHER, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter (Berlin 1887); H. SUTER, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters (Progr. Zürich 1887); H. GROSSE, Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts (Halle 1901); C. MÜLLER, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert (Abhandlungen zur Gesch. d. math. Wiss. XVIII, Leipzig 1904); J. NORRENBERG, Geschichte des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen Deutschlands (Leipzig 1904); R. STARKE, Geschichte des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien in Sachsen seit 1700 (Progr. Chemnitz 1898); F. A. UNGER, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgang des Mittelalters bis auf die Gegenwart (Leipzig 1888); R. SCHIMMACK, Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland (Leipzig 1911); W. LOREY, Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker (Leipzig 1911). Ganz neu erschienen ist eine Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts von FRANZ PAHL (Leipzig 1913), die aber beinahe mehr auf die Geschichte der Forschung als auf die Geschichte des Unterrichtes eingeht. Am raschesten orientiert man sich über alle Fragen des Erziehungswesens aus dem amerikanischen Werk A Cyclopedia of Education, edited by P. Monroe (New York 1911 ff., bis jetzt sind 4 Bände erschienen).

Die geschichtlichen Darstellungen des Unterrichtes werden in manchen Punkten durch die Werke über die Geschichte der mathematischen Disziplinen ergänzt, so namentlich durch die umfassenden Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik von M. CANTOR (Leipzig 1900—1908), denen als speziellere Werke etwa TROPFKE, Geschichte der Elementarmathematik (Leipzig 1902—1903) und A. v. BRAUNMÜHL, Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie (Leipzig 1900—1903) angereiht werden können. Sehr anregend wirken die kürzeren Darstellungen: M. SIMON, Geschichte der Mathematik im Altertum (Berlin 1909), der besonders auf Ägypten und Babylon eingeht; H. HANKEL, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum

und Mittelalter (Leipzig 1874) und H. G. ZEUTHEN, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (Kopenhagen 1896), Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert (Leipzig 1903).

Was die Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichtes betrifft, so ist zunächst das etwas ältere Buch von M. SIMON, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik (2. erweiterte Auflage, München 1908) anzuführen, ferner die neueren Werke A. HÖFLER, Didaktik des mathematischen Unterrichtes (Leipzig 1910) und KILLING und HOVESTADT, Handbuch des mathematischen Unterrichtes (Leipzig 1910—1911), die zusammengenommen den gegenwärtigen Standpunkt deutlich hervortreten lassen. Die modernen Ideen kommen besonders klar und prägnant zum Ausdruck bei F. KLEIN und R. SCHIMMACK, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen (Leipzig 1907). Dazu vergleiche man die von F. KLEIN und E. RIECKE herausgegebene Vortragsammlung Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen (Leipzig 1904). Eine Spezialfrage behandelt mit einer gründlichen historischen Darstellung P. TREUTLEIN, Der geometrische Anschauungsunterricht (Leipzig 1911). Dazu vergleiche man etwa H. E. TIMERDING, Erziehung der Anschauung (Leipzig 1912) und B. BRANFORD, Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität, deutsch von SCHIMMACK und WEINREICH (Leipzig 1913). Am sichersten und ausführlichsten belehren über den gegenwärtigen Stand des mathematischen Unterrichts in allen seinen verschiedenen Verzweigungen, soweit Deutschland in Frage kommt, die Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale mathematische Unterrichtskommission, herausgegeben von F. KLEIN (Leipzig 1909 ff.), deren fünf Bände dem Abschluß nahe sind und von denen in einzelnen Berichten der erste Band die höheren Schulen in Norddeutschland, der zweite Band die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland, der dritte Band Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts, der vierte Band die Mathematik an den technischen Schulen und endlich der fünfte Band die Mathematik an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten behandelt. Diesen Abhandlungen stehen ähnliche Berichte in den übrigen Kulturländern zur Seite. Besonders reich an methodischen und didaktischen Erörterungen sind die in kurzen Einzelabhandlungen vom Board of Education herausgegebenen und dann in zwei größeren Bänden unter den Special Reports on educational subjects unter dem Titel The Teaching of Mathematics in the United Kingdom (London 1912) herausgegebenen englischen Berichte. Viele Fragen des mathematischen Unterrichts sind auch in den Schriften des Deutschen Ausschusses für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Leipzig, 1909 ff.) und in den Abhandlungen und Berichten des Deutschen Ausschusses für technisches Schulwesen (Leipzig, 1910 ff.) behandelt.

